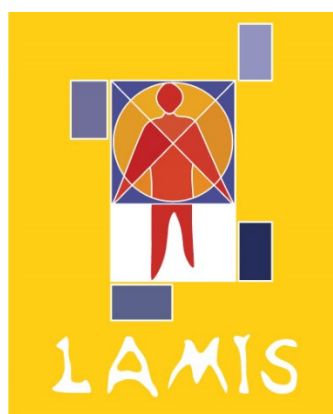




# SEMIFINALEOPPGAVERNE 2023



**MATEMATIKKSENTERET**

Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen



## OPPGAVE 1: DET NYE GJENNOMSNIET

Gjennomsnittet til fem tall er 87.

Vi utvider nå til sju tall, ved å ta med tallene 2022 og 2023.

Finn det nye gjennomsnittet til de sju tallene.

Bruk svararket. Vis hvordan dere har kommet fram til svaret.



Semifinale 2023

## SVARARK OPPGAVE 1

**Skole:** \_\_\_\_\_ **Klasse:** \_\_\_\_\_

Det nye gjennomsnittet er: \_\_\_\_\_

Vi kom fram til svaret slik:



## OPPGAVE 2: BILTUREN

En bilist kjørte fra et sted A til et sted B, og deretter tilbake til A igjen.

Gjennomsnittshastigheten fra A til B var 70 km/h.

Gjennomsnittshastigheten fra B tilbake til A var 80 km/h.

Kjøreturen tilbake fra B til A tok 6 minutter mindre enn kjøreturen fra A til B.

Bestem avstanden (i km) fra A til B.

Bruk svararket. Vis hvordan dere har kommet fram til svaret.



Semifinale 2023

## SVARARK OPPGAVE 2

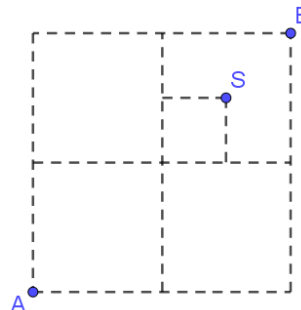
**Skole:** \_\_\_\_\_ **Klasse:** \_\_\_\_\_

Avstanden fra A til B er: \_\_\_\_\_ km

Slik fant vi svaret:

### OPPGAVE 3: VANDRINGEN

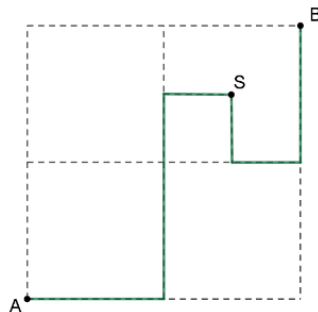
Utstyr: Arbeidsark med figurer maken til denne:



Dere skal lage turstier fra A til S, og videre fra S til B, langs de stiplede linjestykkene.

Ingen av de tolv kvadrathjørnene i figuren kan passeres mer enn én gang.

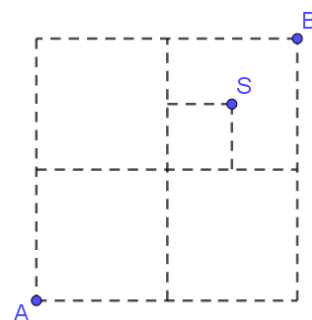
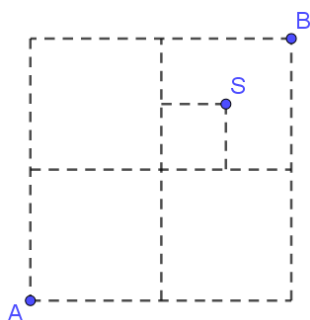
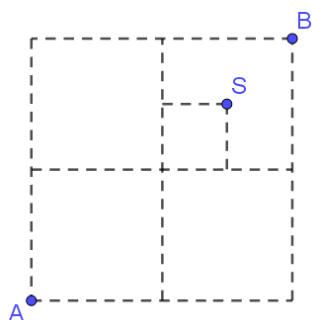
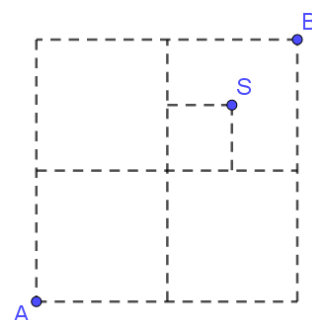
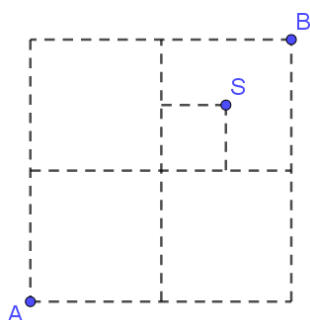
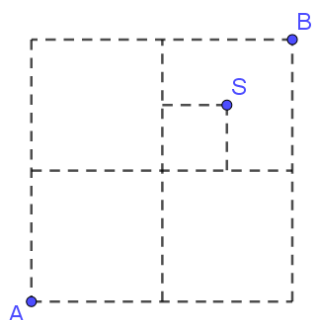
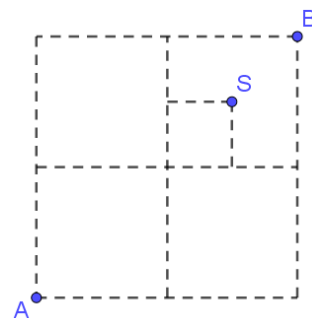
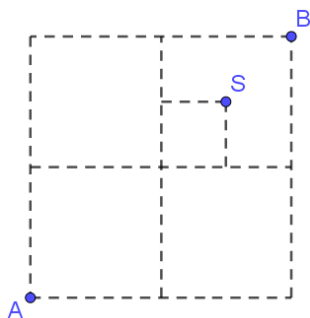
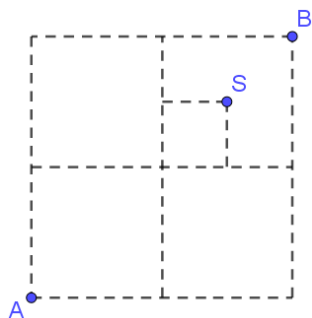
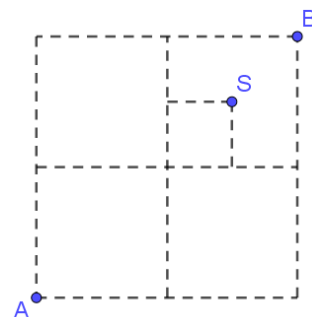
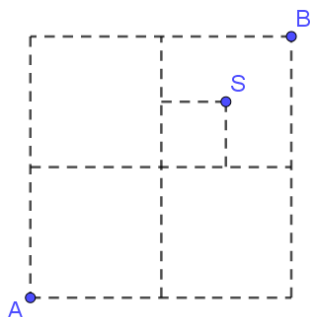
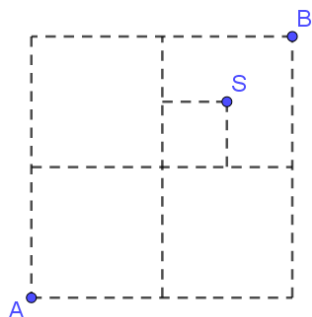
Her ser dere ett eksempel på en slik tur:



Hvor mange forskjellige slike turstier finnes det?

Tegn dem inn på svararket.

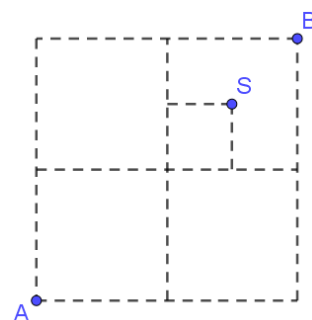
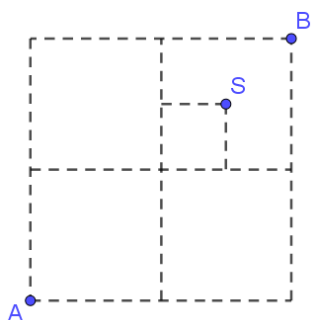
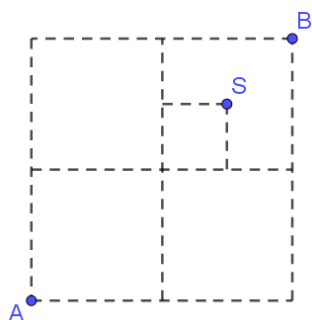
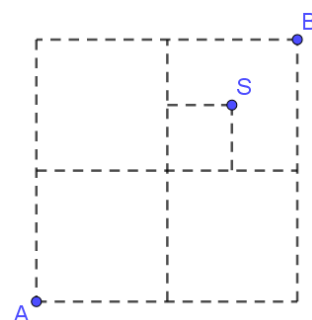
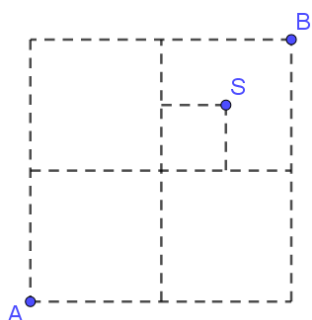
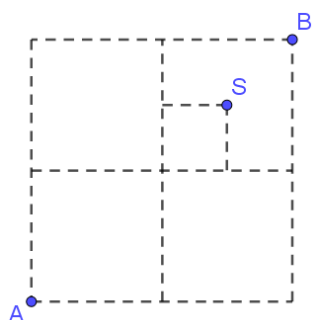
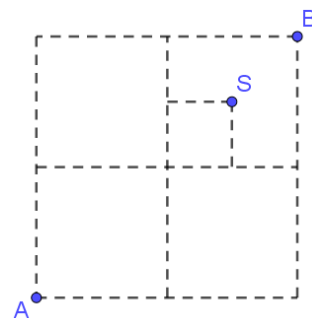
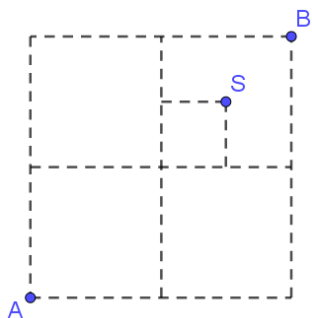
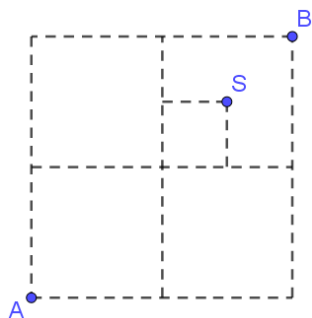
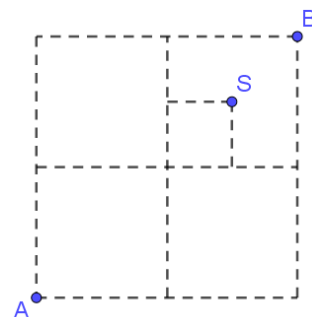
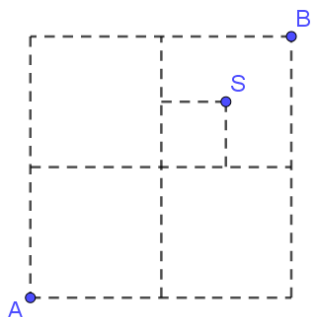
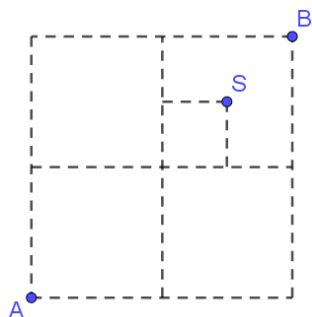
### ARBEIDSARK OPPGAVE 3



### SVARARK OPPGAVE 3

Skole: \_\_\_\_\_

Klasse: \_\_\_\_\_





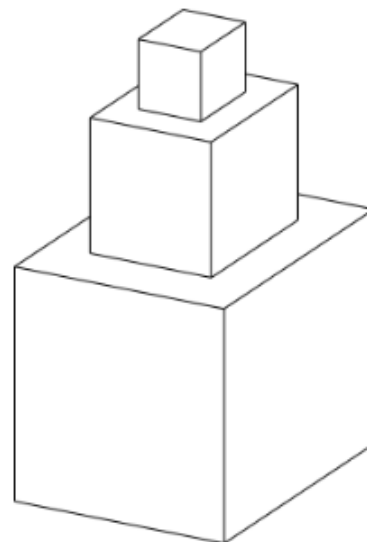
## OPPGAVE 4: KUBETÅRNET

Tre kuber er limt sammen til et kubetårn som vist på figuren:

Sidelengdene i den minste kuben er 3 cm.

Sidelengdene i den mellomste kuben er 5 cm.

Sidelengdene i den største kuben er 8 cm.



Finn kubetårnets overflateareal.

(Bunnen skal ikke tas med.)

Bruk svararket. Vis hvordan du finner svaret.



Semifinale 2023

## SVARARK OPPGAVE 4

**Skole:** \_\_\_\_\_ **Klasse:** \_\_\_\_\_

Den ytre overflaten av kubetårnet er: \_\_\_\_\_ cm<sup>2</sup>

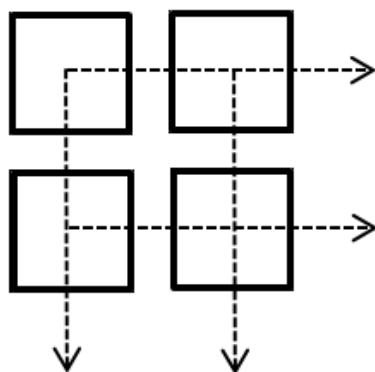
Slik fant vi svaret:

## OPPGAVE 5: SUM 200

Utstyr: Diverse tallbrikker med sifrene fra 0 - 9.

Velg fire sifre (0, 1, 2, ..., 9) og plasser dem i cellene nedenfor.

Ett og samme siffer kan gjentas én eller flere ganger, om ønskelig.



Les de to to-sifrede tallene vannrett, og adder disse.

Les de to to-sifrede tallene loddrett, og adder disse.

Til slutt adderes summene til en sluttsum, jf. eksempelet nedenfor.

Eksempel:

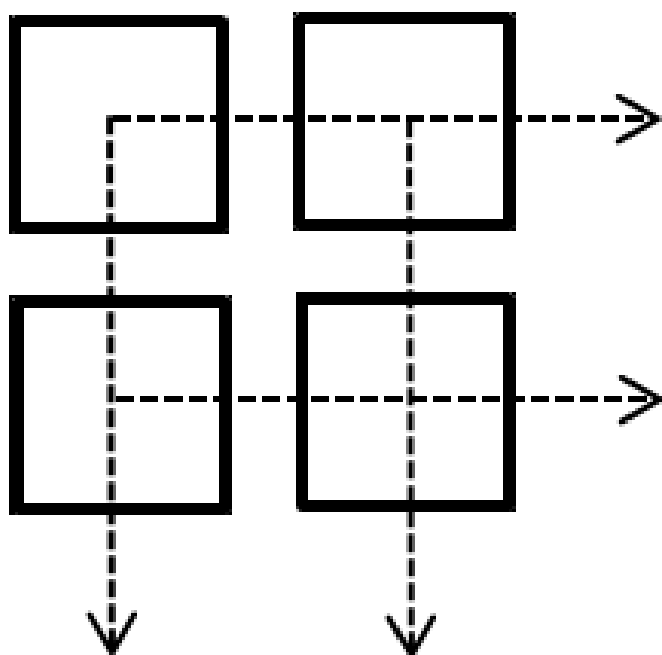
4	1	→	41	+	→	26	67	=	58	Sluttsum = 58 + 67 = 125
2	6	→	26							
↓	↓									
42	+ 16									

Velg sifrene slik at sluttsummen blir 200. Bruk svararket.

## SVARARK OPPGAVE 5

Skole: \_\_\_\_\_ Klasse: \_\_\_\_\_

Fyll ut sifrene, og alle de aktuelle delsummene.



SLUTTSUM = \_\_\_\_\_ + \_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_



## OPPGAVE 6: GULLMYNTEN

Vi ser for oss 19 ulike mynter, på henholdsvis 1, 2, 3, ....., 19 gram.

Ni av myntene er av jern, ni av myntene er av bronse, og én er av gull.

Den samlede vekten av de ni jernmyntene er 90 gram *mer enn* den samlede vekten av de ni bronsemyntene.

Hvor mye veier gullmynten?

Bruk svararket. Husk beregninger/resonnement.



Semifinale 2023

## SVARARK OPPGAVE 6

**Skole:** \_\_\_\_\_ **Klasse:** \_\_\_\_\_

Gullmynten veier \_\_\_\_\_ gram.

Beregninger/resonnement:

**LØSNINGSFORSLAG TIL  
SEMIFINALEOPPGAVERNE 2023**



### Oppgave 1: Det nye gjennomsnittet

Det nye gjennomsnittet er 640.

Begrunnelse:

$$\text{Sum(fem tall)} = 5 \cdot \text{gjennomsnitt (fem tall)} = 5 \cdot 87 = 435$$

$$\text{Sum(sju tall)} = 435 + 2022 + 2023 = 4480$$

$$\text{Nytt gjennomsnitt (sju tall)} = 4480 : 7 = 640$$





### Oppgave 2: Bilturen

Avstanden mellom A og B er 56 km.

Beregninger:

Lar  $t$  være tiden (målt i timer) brukt fra A til B, og  $s$  være avstanden (målt i km) mellom A og B. Da gjelder at  $s = 70 \cdot t$

Tiden brukt mellom B og A på tilbaketuren er  $t - 0,1$  fordi 6 minutter = 0,1 timer.

Nå gjelder at  $s = 80(t - 0,1) = 80 \cdot t - 8$

Sammenlikner de to uttrykkene for  $s$ , og finner at  $10 \cdot t = 8$ , dvs  $t = 0,8$ .

Det gir  $s = 70 \cdot 0,8 = 56$  (målt i km).

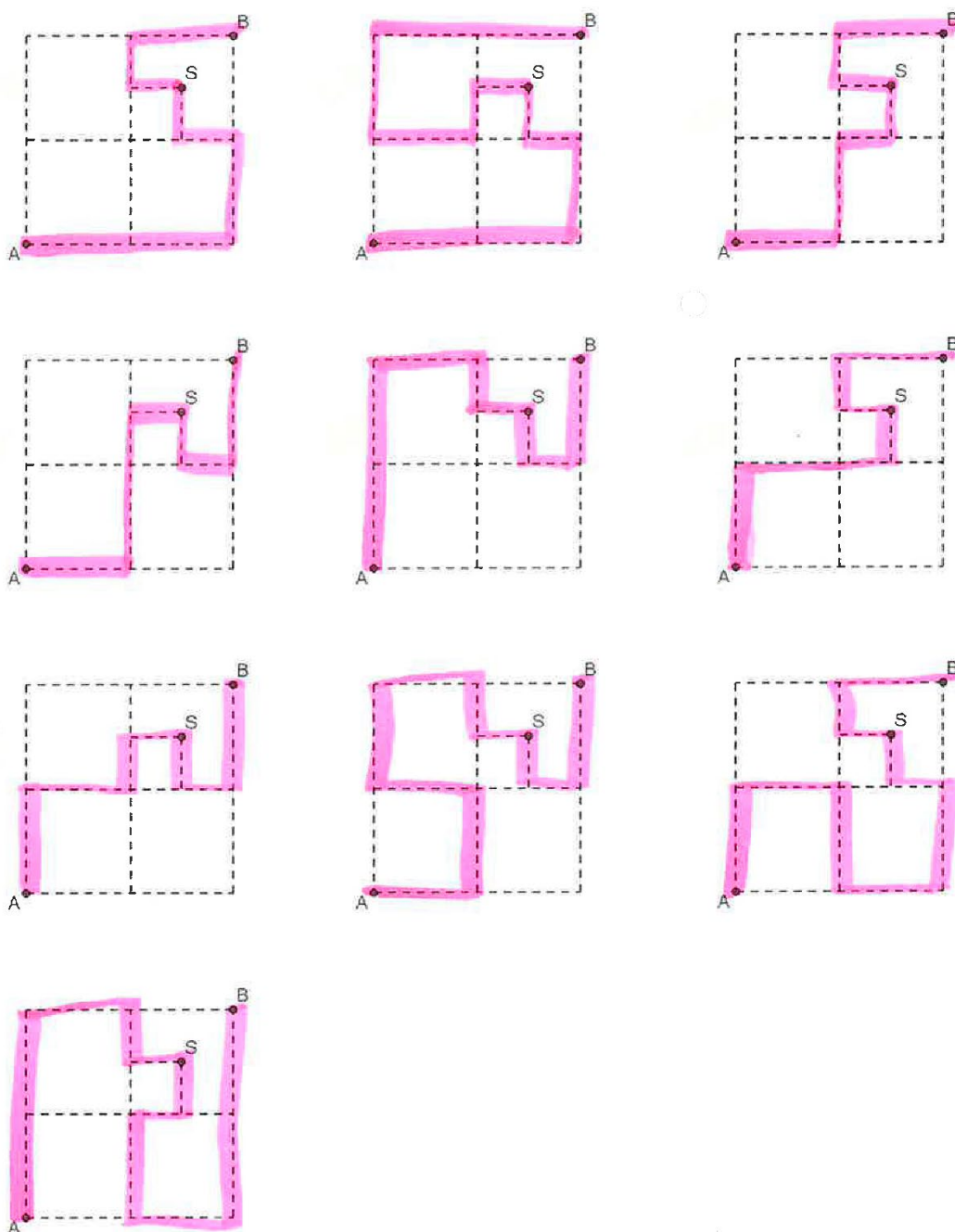
(Eller vi kan regne slik:  $s = 80 \cdot 0,7 = 56$ , siden tiden på tilbaketuren er  $0,8 - 0,1 = 0,7$ .)

### Oppgave 3: Vandringsen

Det kan være lurt å systematisere letingen etter turstiene.

For eksempel kan vi først ta for oss alle som starter med to steg enten til høyre eller rett opp, i alt fire slike. Så alle varianter som starter med kun ett steg enten til høyre eller rett opp, i alt fire slike.

Vi har følgende  $ti$  mulige turstier:



## Oppgave 4: Kubetårnet

Overflaten av kubetårnet er  $456 \text{ cm}^2$ .

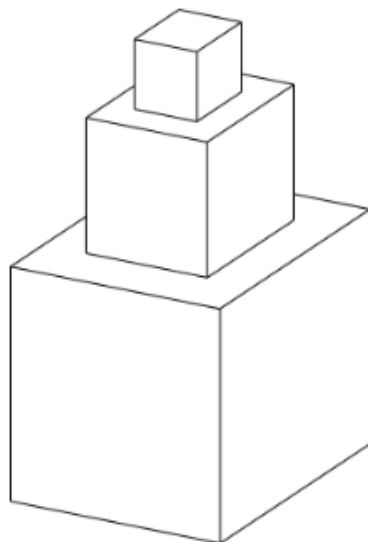
Beregninger:

$$\text{Nederste etasje: } 4 \cdot 8^2 + (8^2 - 5^2) = 4 \cdot 64 + (64 - 25) = 256 + 39 = 295$$

$$\text{Midterste etasje: } 4 \cdot 5^2 + (5^2 - 3^2) = 4 \cdot 25 + (25 - 9) = 100 + 16 = 116$$

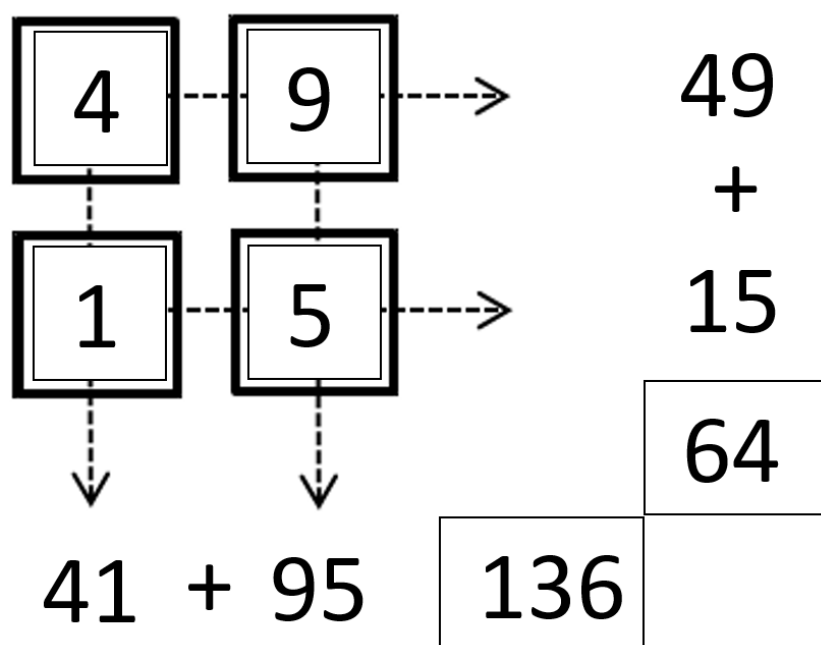
$$\text{Øverste etasje: } 5 \cdot 3^2 = 5 \cdot 9 = 45$$

$$\text{AREALSUM} = 295 + 116 + 45 = 456$$



**Oppgave 5: Sum 200**

Forslag til sluttsum 200:



**SLUTTUM = 136 + 64 = 200**



### Oppgave 6: Gullmynten

Gullmynten veier 10 gram.

Beregninger:

Som alternativ til å lete helt i blinde, kan det være lurt å resonnerer litt.

Observer at  $1+2+3+\dots+19=190$  (= det 19. trekantall  $=\frac{1}{2}\cdot 19\cdot(19+1)$ )

Hvis  $B$  = samlet vekt av bronsemyntene, så er  $B+90=J$  = samlet vekt av jernmyntene.

Med  $G$  som gullmyntvekten, gjelder da  $G+B+(B+90)=190$ , dvs  $G+2B=100$ .

$2B$  er nødvendigvis et partall, og dermed må også  $G$  være et partall, siden 100 er det.

Så det er nok å lete blant  $G=2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16$  og 18.

Vi kan også se at når ett av partallene nå er holdt av til  $G$ , gjenstår det åtte partall og ti oddetall blant myntene. Dermed må nødvendigvis både  $B$  og  $J$  være oddetall.

Observerer også at  $2B=100-G$ , dvs  $B=50-\frac{1}{2}G$ . Dermed kan ikke  $G$  være delelig med 4, for da ville  $B$  blitt et partall. (F.eks vil  $G=8$  gi  $B=50-\frac{1}{2}\cdot 8=50-4=46$  som er partall.)

Altså er det nok å lete blant  $G=2, 6, 10, 14$ , og 18.

En idé vi også kan få, er at  $1+10=11, 2+10=12, 3+10=13$  osv..., dvs at summen  $11+12+13+14+15+16+17+18+19$  er  $9\cdot 10$  (= 90) større enn summen  $1+2+3+4+5+6+7+8+9$ . Og dermed har vi jo funnet nettopp den differensen på 90 som vi var på jakt etter.

Altså

$$\text{Jernmyntene:} \quad 11+12+13+14+15+16+17+18+19 = 90 + 45 = 135$$

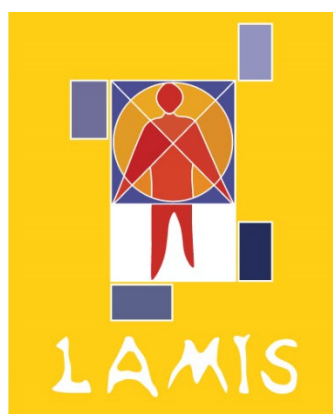
$$\text{Bronsemyntene:} \quad 1+2+3+4+5+6+7+8+9 = 45$$

$$\text{Gullmynten:} \quad 10$$

Og mer enn én løsning kan det nå umulig være, i og med at det skal være like mange jernmynter som bronsemynter. Straks vi forsøker å bytte ut gullmyntvekten med enten en jernmynt- eller bronsemyntvekt, ødelegges vektsum-differansen mellom jern og bronse, og denne lar seg da ikke reparere kun ved å bytte én og én jernmynt med en bronsemynt.



# FINALEOPPGAVENE 2023

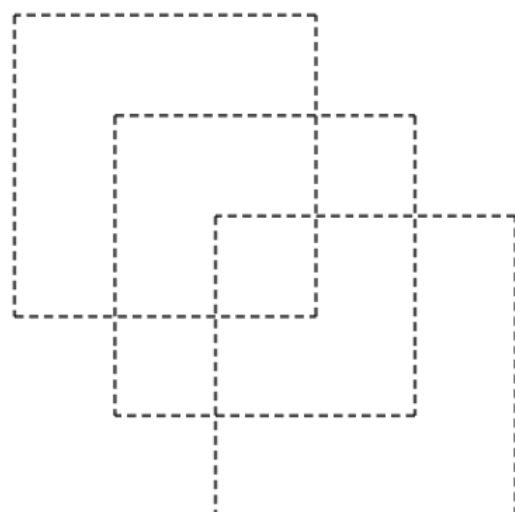
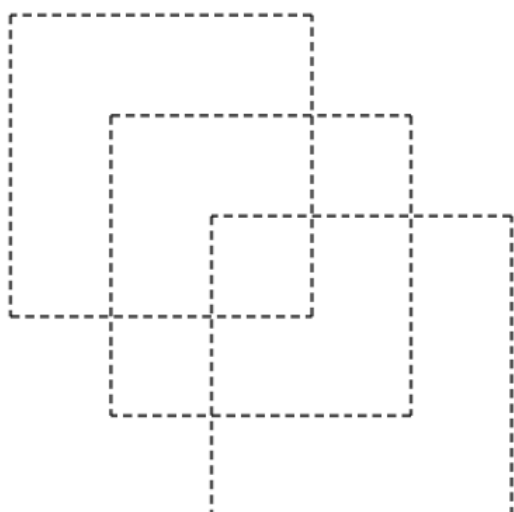
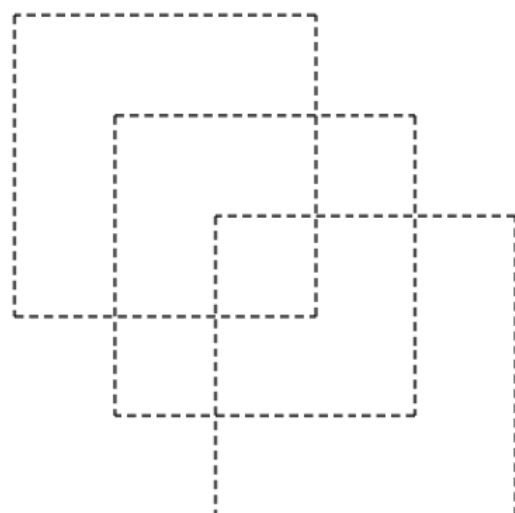
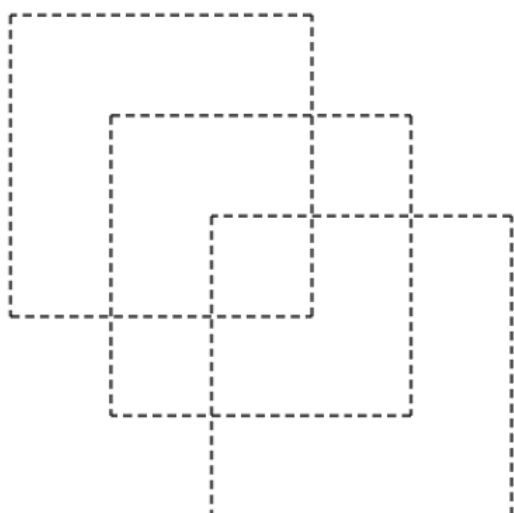
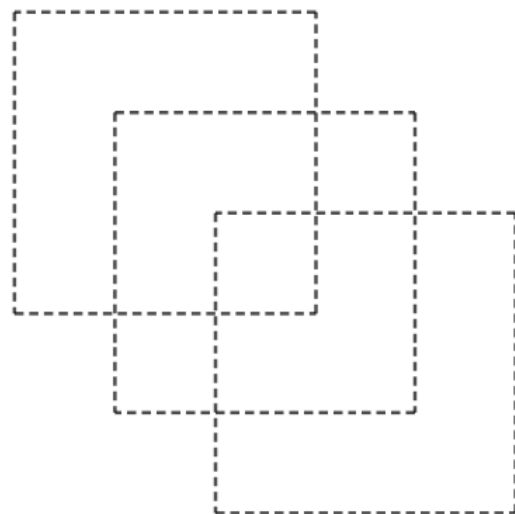
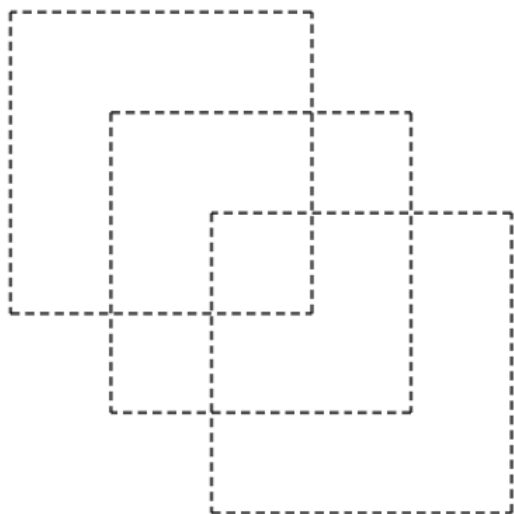


**MATEMATIKKSENTERET**

Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen

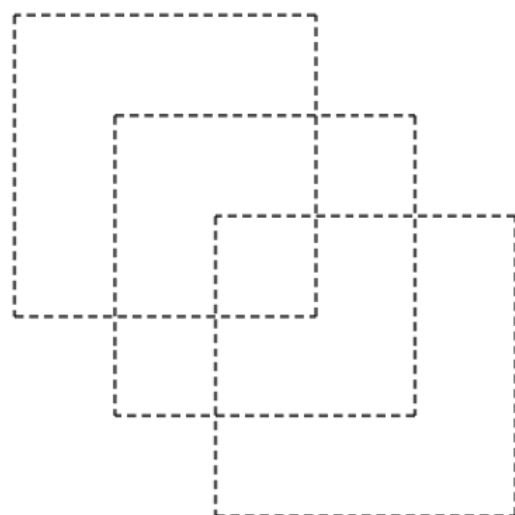
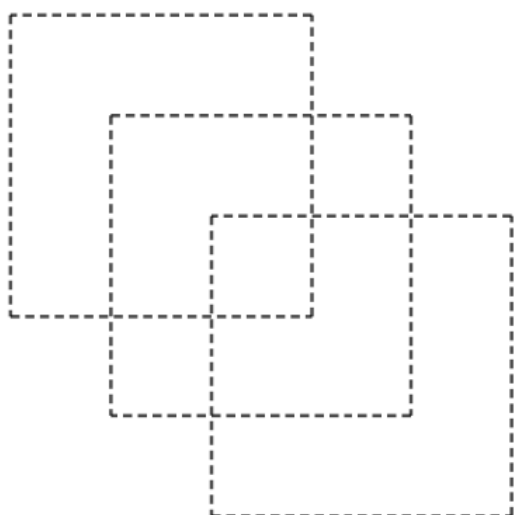
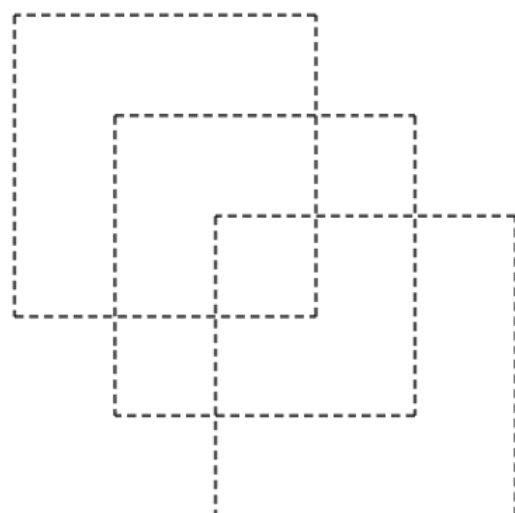
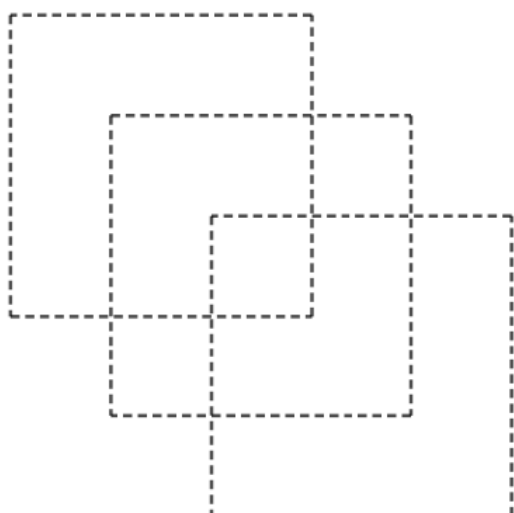
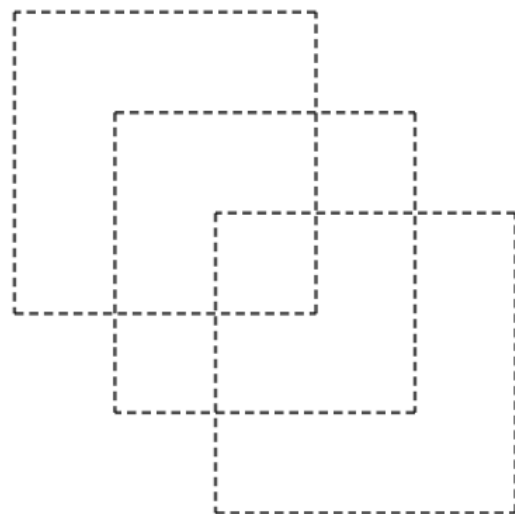
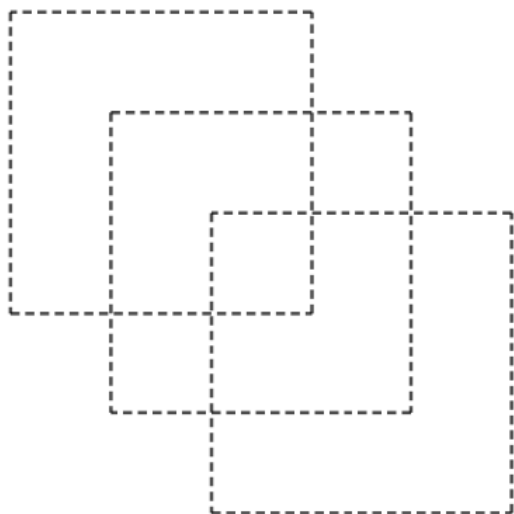


ARBEIDSARK OPPGAVE 1





ARBEIDSARK OPPGAVE 1



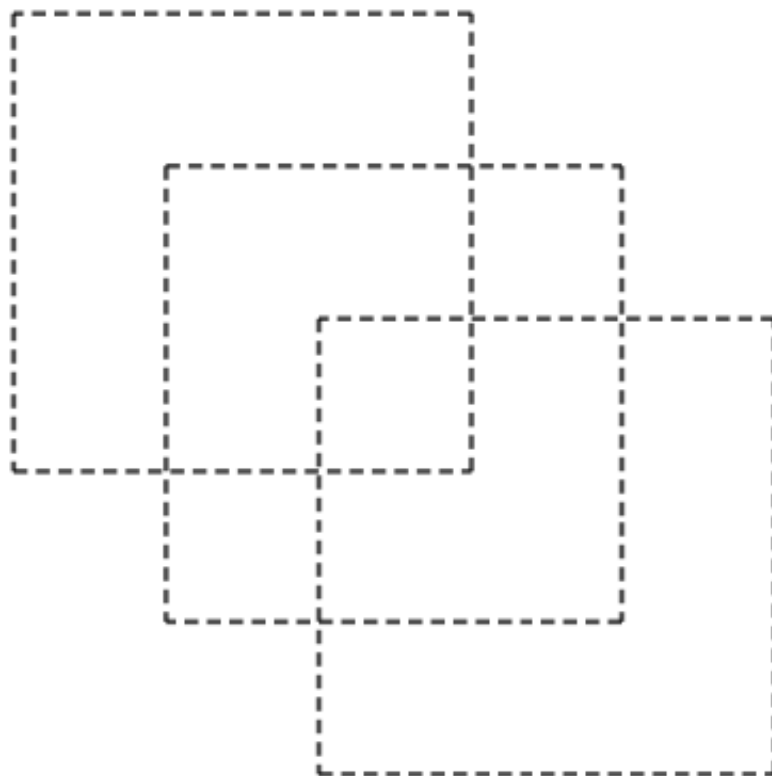


Finale 2023

## SVARARK OPPGAVE 1

Skole: \_\_\_\_\_ Klasse: \_\_\_\_\_

Løsning:





**OPPGAVE 2: SUMMEN ER 385**

Adder påfølgende, positive, hele tall slik at summen blir 385.

Finn så mange ulike løsninger som mulig.

Bruk svararket.



**Finale 2023**

## **SVARARK OPPGAVE 2**

**Skole:** \_\_\_\_\_ **Klasse:** \_\_\_\_\_

Løsninger:



### OPPGAVE 3: FINN SIFRENE

*Utstyr: Tallkort med sifre 0 - 9, fire eksemplarer av hvert.*

I regnestykket nedenfor er A, B og C forskjellige sifre.

Avgjør hvilke. Vis hvordan dere resonnerer.

Bruk svararket.

$$\mathbf{AAB \cdot B = CB5B}$$



### SVARARK OPPGAVE 3

Skole: \_\_\_\_\_ Klasse: \_\_\_\_\_

$$AAB \cdot B = CB5B$$

<b>A</b>	=	
<b>B</b>	=	
<b>C</b>	=	

Forklar hvordan dere har resonert.

## OPPGAVE 4: TALLENE 1 – 4

Materiell: Tallbrikker med tallene 1, 2, 3 og 4. Fire eksemplarer av hvert enkelt tall.

Spillebrettet nedenfor skal fylles ut med énsifrede tall, slik at følgende to krav er oppfylt:

- I) Hver rad og hver kolonne skal inneholde tallene 1, 2, 3 og 4.
- II) Tegnene  $>$  og  $<$  mellom enkelttall er ivaretatt.

Bruk svararket til å skrive ned løsningen.

			3
		$<$	
1			
	$>$		
3			2

## ARBEIDSARK OPPGAVE 4

			3
		<	
1			
3			2



## SVARARK OPPGAVE 4

Skole: \_\_\_\_\_ Klasse: \_\_\_\_\_

Løsning:

			3
		<	
1			
	∨		
3			2



## **OPPGAVE 5: FORDELE RIS**

To personer har 8 dl ris som de skal dele likt.

De strever litt med å få målt risen nøyaktig, for de har kun til disposisjon tre bokser som rommer henholdsvis 3 dl, 5 dl og 8 dl.

Til å begynne med, er boksene 3 og 5 helt tomme, mens all risen er i boks 8.

Hvordan kan de dele risen likt, ved hjelp av disse boksene? Dere må helle fra boks til boks.

Bruk svararket.

**SVARARK OPPGAVE 5**
**Skole:** \_\_\_\_\_ **Klasse:** \_\_\_\_\_

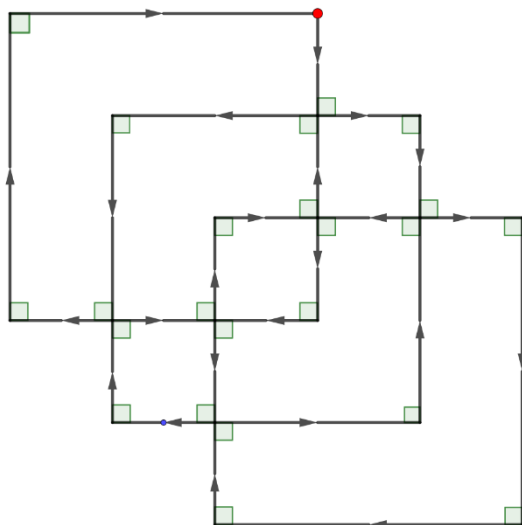
Løsning:

	desiliter i boksene			Beskrivelse ( hva har skjedd)
	3 dl boks	5 dl boks	8 dl boks	
<b>start</b>	0	0	8	All risen er i boks 8
<b>1</b>				dl fra boks til boks
<b>2</b>				dl fra boks til boks
<b>3</b>				dl fra boks til boks
<b>4</b>				dl fra boks til boks
<b>5</b>				dl fra boks til boks
<b>6</b>				dl fra boks til boks
<b>7</b>				dl fra boks til boks
<b>8</b>				dl fra boks til boks
<b>9</b>				dl fra boks til boks
<b>10</b>				dl fra boks til boks
<b>11</b>				dl fra boks til boks
<b>12</b>				dl fra boks til boks

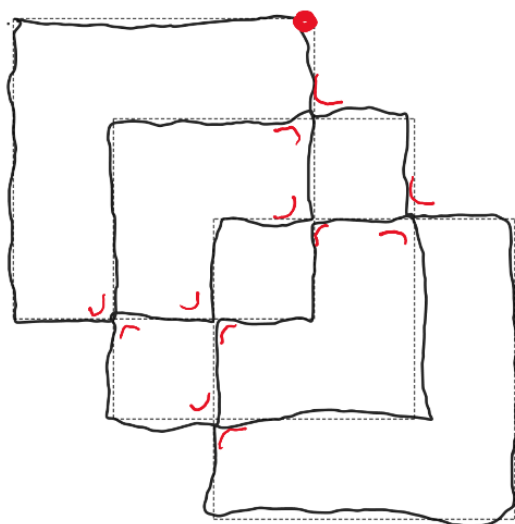
**LØSNINGSFORSLAG TIL  
FINALEOPPGAVENE 2023**

## OPPGAVE 1: TRE KVADRATER

Ett (blant flere) mulige løsninger kan se slik ut:



Dette kan f.eks isteden tegnes på denne måten:



Forslag til oppfølgingsøvelse når dere kommer hjem:

Skriv et dataprogram som tegner opp figuren nøyaktig etter denne oppskriften.



## OPPGAVE 2: SUMMEN ER 385

Det viser seg at det er mulig å få 385 som sum av påfølgende tall på sju forskjellige måter.

To påfølgende:  $192 + 193$

Fem påfølgende:  $75 + 76 + 77 + 78 + 79$

Sju påfølgende:  $52 + 53 + 54 + 55 + 56 + 57 + 58$

Ti påfølgende:  $34 + 35 + 36 + 37 + 38 + 39 + 40 + 41 + 42 + 43$

11 påfølgende:  $30 + 31 + 32 + 33 + 34 + 35 + 36 + 37 + 38 + 39 + 40$

14 påfølgende:  $21 + 22 + 23 + 24 + 25 + 26 + 27 + 28 + 29 + 30 + 31 + 32 + 33 + 34$

22 påfølgende:  $7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 + 17 + 18 + 19 + 20 + 21 + 22 + 23 + 24 + 25 + 26 + 27 + 28$

Tabellen nedenfor viser litt mer i detalj hvordan jakten etter varianter kan se ut.

De **røde** radene viser her tallremser med andre lengder, der summene istedenfor bare kommer «i nærheten» av 385.

SUM	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
385	192	193																				
384	127	128	129																			
382	94	95	96	97																		
385	75	76	77	78	79																	
387	62	63	64	65	66	67																
385	52	53	54	55	56	57	58															
388	45	46	47	48	49	50	51	52														
387	39	40	41	42	43	44	45	46	47													
385	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43												
385	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40											
390	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38										
390	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36									
385	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34								
390	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33							
392	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32						
391	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31					
387	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30				
380	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29			
390	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29		
378	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	
385	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28



### Mer teoretisk betraktning (for spesielt interesserte)

Ved å innse at hver slik sum er en aritmetisk rekke (med  $d=1$ ), og bruke formler for slike, er det mulig å analysere situasjonen nærmere.

$$\text{Vi har } s_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2} \quad \text{og} \quad a_n = a_1 + d \cdot (n - 1) = a_1 + n - 1$$

$$\text{Da følger } s_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_1 + n - 1)}{2} = n \cdot a_1 + \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n \quad \text{dvs} \quad 385 = n \cdot a_1 + \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$$

$$\text{Vi løser dette med hensyn på starttallet } a_1 \text{ og finner: } a_1 = \frac{385}{n} + \frac{1}{2} - \frac{n}{2}$$

Her kan vi f.eks *prøve oss fram* med  $n=2, 3, 4$ , osv... og hver gang  $a_1$  blir heltallig, har vi funnet en ny løsning. For eksempel gir  $n=2$  at  $a_1 = 192$ , med summen  $192+193 = 385$ , og  $n=5$  gir  $a_1 = 75$ , med summen  $75+76+77+78+79 = 385$ .

Her må vi også passe på at  $a_1$  blir positiv (så  $n$  kan ikke være for stor). Nærmere bestemt, finner vi at for å sikre  $a_1 > 0$ , må kreve  $n < 29$ .

Det går også an å analysere uttrykket for  $a_1$  enda nøyere, og innse at for at  $a_1$  skal bli heltallig, må enten  $n$  være en odde divisor i 385 (dvs et tall som 385 er delelig med), eller så må  $\frac{n}{2}$  være en slik divisor. (Ellers blir ikke summen  $\frac{385}{n} + \frac{1}{2} - \frac{n}{2}$  et helt tall.)

Via primfaktoriseringen ( $385 = 5 \cdot 7 \cdot 11$ ) finner vi at divisorene er 1, 5, 7, 11, 35, 55, 77 og 385 selv. Av disse er det dermed kun 5, 7 og 11 som gir positiv  $a_1$ . (Her kan vi ikke bruke  $n=1$ , siden summen jo skal inneholde minst to påfølgende tall.)

Og de doble kandidat-tallene blir 2, 10, 14, 22, 70, 110, 154 og 770, og av disse er det nå kun 2, 10, 14 og 22 som gir positiv  $a_1$ . (Husk kravet  $n < 29$ .)

Alt i alt sitter vi igjen med følgende remselengder ( $n$ -verdier): 2, 5, 7, 10, 11, 14 og 22.

Det er gøy å se at vi fikk det samme som i tabellen. Sånn *må* det riktignok være, dersom både tabellen og resonnementet er riktig, men likevel... 😊



**OPPGAVE 3: FINN SIFRENE**

<b>A</b>	<b>=</b>	<b>7</b>
<b>B</b>	<b>=</b>	<b>6</b>
<b>C</b>	<b>=</b>	<b>4</b>

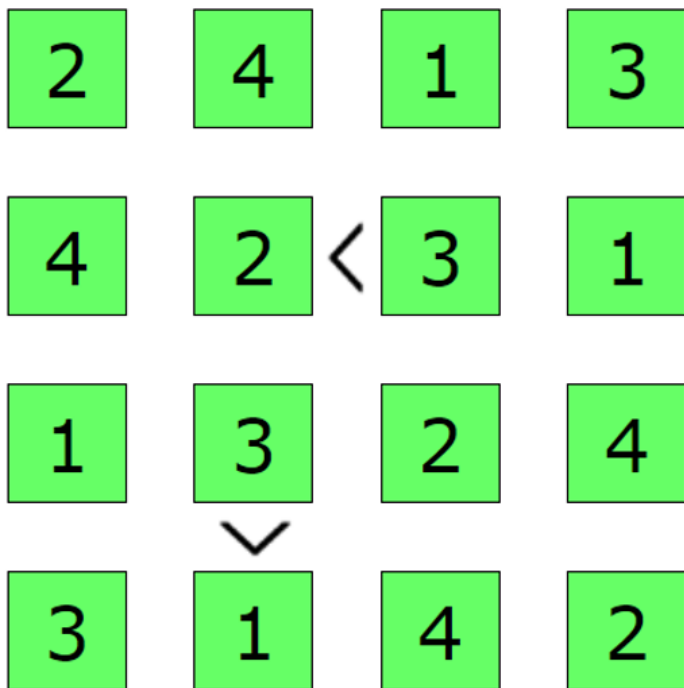
$$AAB \cdot B = CB5B$$

$$776 \cdot 6 = 4656$$

$$\begin{aligned} & (= 700 \cdot 6 + 70 \cdot 6 + 6 \cdot 6 = \\ & = 4200 + 420 + 36 ) \end{aligned}$$



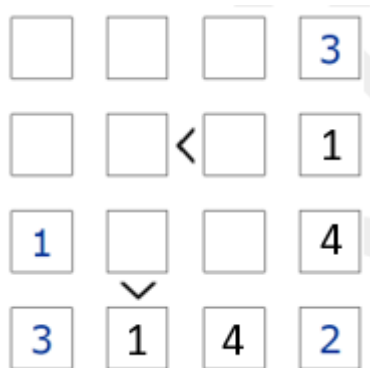
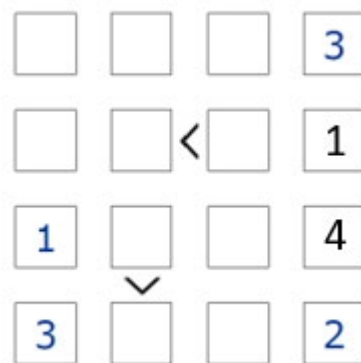
**OPPGAVE 4: TALLENE 1 – 4**



**Utfyllende (!) kommentar**

Utfyllingen blir litt å sammenlikne med Sudoku.

For eksempel ser vi at i kolonnen helt til høyre må 1 stå over 4, siden 1-tallet ellers vil komme i konflikt med 1-tallet i kolonnen helt til venstre.



Og i nederste rad, må 1 stå til venstre for 4, for ellers ville 4-tallet stride mot ulikhetstegnet mellom tredje og fjerde rad.

Og så videre...

## OPPGAVE 5: FORDELE RIS

Fordelingen kan f.eks utføres slik:

	desiliter i boksene			Beskrivelse (/ hva har skjedd)
	3 dl boks	5 dl boks	8 dl boks	
<b>start</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>8</b>	All risen er i boks 8
<b>1</b>	<b>0</b>	<b>5</b>	<b>3</b>	5 dl fra boks 8 til boks 5
<b>2</b>	<b>3</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	3 dl fra boks 5 til boks 3
<b>3</b>	<b>0</b>	<b>2</b>	<b>6</b>	3 dl fra boks 3 til boks 8
<b>4</b>	<b>2</b>	<b>0</b>	<b>6</b>	2 dl fra boks 5 til boks 3
<b>5</b>	<b>2</b>	<b>5</b>	<b>1</b>	5 dl fra boks 8 til boks 5
<b>6</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>1</b>	1 dl fra boks 5 til boks 3
<b>7</b>	<b>0</b>	<b>4</b>	<b>4</b>	3 dl fra boks 3 til boks 8