Oppgaver runde 1: 2. – 26. november 2021

Maksimal tid som kan brukes i elevgruppa/klassen er 90 minutter.

Om flere elevgrupper fra samme skole deltar oppfordrer vi til at konkurransen gjennomføres samtidig for alle gruppene/klassene.

For å oppnå størst mulig deltakelse, kan klassen organiseres i grupper. Hver gruppe prøver å løse alle oppgavene, men de ulike gruppene kan begynne på forskjellige steder i oppgavesettet.

Læreren kan tegne opp et skjema på tavla over alle oppgavene og de ulike gruppene. Da ser en fort hvor svarene eventuelt skiller seg og hvor elevene må bruke noe tid på å diskutere seg frem til et felles svar.

Alle hjelpemidler er tillatt, unntatt Internett og andre verktøy som tillater kommunikasjon.

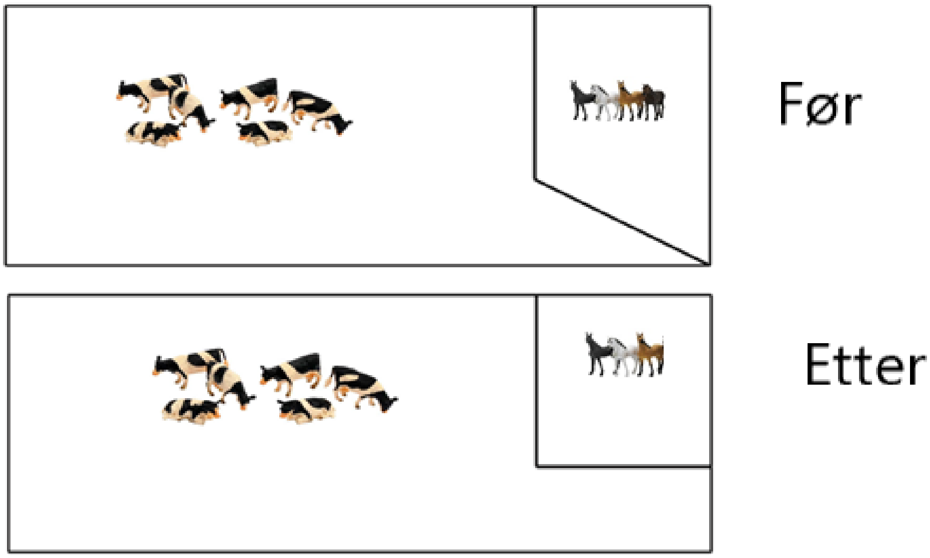
Totalt kan man få 40 poeng for oppgavesettet, maksimalt 5 poeng per oppgave.

Lykke til!

Oppgave 1: Kuer og hester

En bonde hadde to beiteområder – ett til kuer og ett til hester. Kubeitet var fire ganger så stort som hestebeitet.

En dag solgte bonden én av hestene sine. Han valgte å redusere størrelsen på hestebeitet og gjøre det om til kubeite. Da ble kubeitet fem ganger større enn hestebeitet:



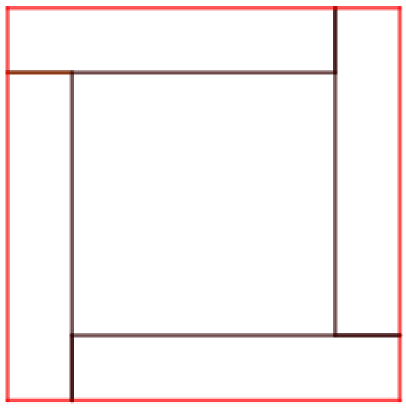
Hvor stor del av den opprinnelige størrelsen ble hestebeitet redusert med?

Oppgave 2: Areal

Fire kongruente rektangler og ett kvadrat er satt sammen, uten overlapping, slik at de danner et større kvadrat – som figuren viser.

Omkretsen til hvert enkelt rektangel er 40 cm.

Hvor stort areal har det store kvadratet (rød figur)?

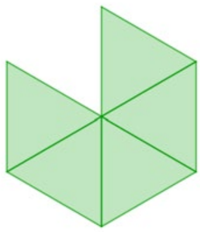


Oppgave 3: Brøk på tallinja

Hvilke brøker på tallinja har nøyaktig fire ganger så stor avstand til $-\frac{1}{2}$ som til $\frac{1}{3}$?

Oppgave 4: Trekant-puslespill

Du har fem regulære trekanter. De fem trekantene settes sammen slik at hver trekant har minst én side felles med en annen trekant. Eksempel:



Hvor mange *forskjellige* figurer kan en da lage i tillegg til denne dere ser her?

NB: To figurer regnes som *forskjellige* dersom en ikke kan speile eller rotere dem slik at de nøyaktig dekker hverandre.

Svaret oppgis kun som et tall (figurer skal ikke sendes inn).

Oppgave 5: Fjerne tallbrikker

Anta at vi plasserer tallbrikker med heltallene 1, 2, 3, …, 23, 24 i stigende rekkefølge, med klokka, rundt i en sirkel. (Tenk gjerne på dette som en 24-timers klokke.)
Så skal vi gå rundt og rundt sirkelen, med klokka, og fjerne hver tredje tallbrikke som er igjen.

a) Hvilken tallbrikke blir den tjuende vi fjerner, hvis vi starter med å fjerne tallbrikke 1?

b) Hvilken tallbrikke må vi starte med å fjerne dersom vi ønsker at den tjuende brikken vi fjerner er tallbrikke 21? Forklar hvordan dere tenkte.

Oppgave 6: Middelverdier

8			26	x

I denne figuren skal det stå ett tall i hver rute. For hvert av tallene i de grå rutene skal det gjelde at tallet er middelverdien til tallet i naboruten til venstre og til høyre for seg.

Hvilken verdi må da x ha?

Oppgave 7: Delelig med 7

Undersøk forskjellige firesifrede tall som består av sifrene 3, 4, 5 og 6.
I hvert tall skal hvert av de fire sifrene brukes eksakt én gang.

Hvilke slike tall er delelige med 7? (Altså: 7 skal gå opp i tallet.)

Oppgave 8: Tennis

Susanne og Lise liker å spille tennis. Før hver kamp satser de 1 euro hver. Susanne vant tre kamper, mens Lise fikk en total gevinst på 5 euro.

Hvor mange tenniskamper spilte de?

Løsninger runde 1

Alle oppgavene gis mellom 0 og 5 poeng utfra individuell vurdering. Totalt 40 poeng.

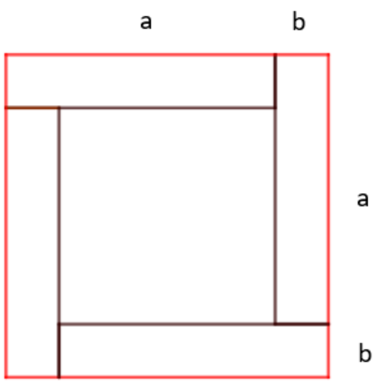
Oppgave 1: Kuer og hester

Vi kan la K og H være de opprinnelige størrelsene til henholdsvis kubeitet og hestebeitet. Det nye hestebeitet har størrelsen H – D, der D er differensen (det som skal trekkes fra) og det nye kubeitet har størrelsen K+D.

Vi har da at $K = 4H$ og $K+D = 5(H – D)$, dvs $4H + D = 5(H – D) = 5H – 5D$.
Dermed følger at $6D = H$, og altså at $D = H/6$.

Hestebeitet minsket med en seksdel. (Altså: En seksdel av H ble trukket fra.)

Oppgave 2: Areal



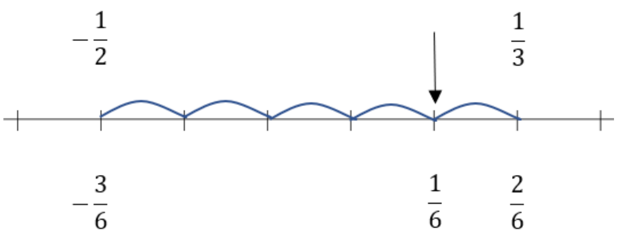
Vi vet at $2a + 2b = 40$, der a og b er sidelengder i rektangelet.
Ved å dividere med 2, følger at $a + b = 20$.

Arealet av det røde kvadratet er dermed $(a + b)^2 = 20^2 = 400$.

Oppgave 3: Brøk på tallinja

Hvis vi deler opp intervallet fra $-\frac{1}{2}$ til $\frac{1}{3}$ i fem like lange biter b, finner vi brøken vi leter etter ved å legge fire slike biter til $-\frac{1}{2}$ (Alternativ: Trekke én slik bit fra $\frac{1}{3}$).

$$b = \frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{1}{5}\left(\frac{2}{6} + \frac{3}{6}\right) = \frac{1}{5}\cdot\frac{5}{6}$$
$$= \frac{1}{6}$$

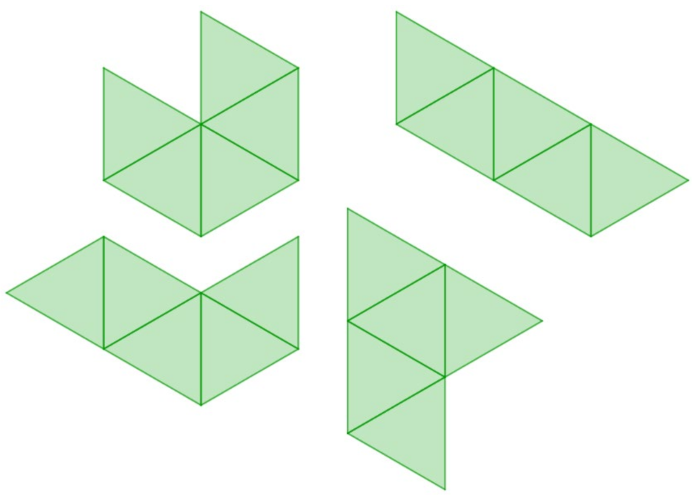


Ønsket brøk = $-\frac{1}{2} + 4\cdot\frac{1}{6} = -\frac{3}{6} + \frac{4}{6} = \frac{1}{6}$

Dersom punktet ligger til høyre for en tredel, blir svaret 11/18.

Oppgave 4: Trekant-puslespill

Uten å få speilede eller roterte varianter av de øvrige, er det tre forskjellige figurer en kan lage i tillegg til eksemplet i oppgaveteksten:



Oppgave 5: Fjerne tallbrikker

a) I løpet av første runde, fjerner vi brikkene 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19 og 22. På neste runde fjernes 2, 6, 11, 15, 20 og 24. På tredje runde fjernes 8, 14 og 21. På fjerde runde fjernes 5 og 17. Da har vi fjernet nitten brikker. Den neste som står for tur er brikke 3, som dermed blir den tjuende brikken vi fjerner.

   (De fire brikkene som da fortsatt ligger igjen, er 9, 12, 18 og 23.)

b) Siden brikker 21 ligger 18 steg lengre ut på runden enn brikke 3, må vi starte 18 steg lengre ut på runden enn da vi startet fra brikke 1. Altså må vi nå starte på brikke 19.

Oppgave 6: Middelverdier

Vi kan f.eks kalle de øvrige ukjente tallene for a og b, henholdsvis. Siden a er middelverdien til 8 og b, følger at $8 + b = 2a$. Tilsvarende får vi at $a + 26 = 2b$ og at $b + x = (2 \cdot 26 =)\ 52$.

Løser vi likningene, får vi $a = 14$, $b = 20$ og $x = 32$.

F.eks slik:
$8 + b = 2a$ gir, ved dobling, $16 + 2b = 4a$
$16 + 2b = 4a$ og $a + 26 = 2b$ gir ved innsetting $a + 42 = 4a$, dvs $3a = 42$, dvs $a = 14$
Ved innsetting, følger nå $2b = 40$, dvs $b = 20$, og videre at $x = 52 – b = 52 – 20 = 32$.

Man kan også finne svaret ved å prøve seg fram.

Oppgave 7: Delelig med 7

Observerer at antall forskjellige tall å lete blant, er $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$. Det er ikke flere enn at det er greit å sjekke ett og ett, eventuelt ved hjelp av et regneark.

Tre slike tall er delelige med 7, nemlig 3465 ($=495 \cdot 7$), 3654 ($=522 \cdot 7$), og 4536 ($=648 \cdot 7$).

Oppgave 8: Tennis

Lise taper 1 euro for hver kamp Susanne vinner. Så hvis Lise totalt har en gevinst på 5 euro, må hun ha vunnet fem kamper mer enn Susanne, dvs Lise har vunnet ($3 + 5 =$) 8 kamper. De spilte altså ($3 + 8 =$) 11 kamper i løpet av disse dagene.

Oppgaver runde 2: 4. – 28. januar 2022

Maksimal tid som kan brukes i elevgruppa/klassen er 90 minutter.

Om flere elevgrupper fra samme skole deltar oppfordrer vi til at konkurransen gjennomføres samtidig for alle gruppene/klassene.

For å oppnå størst mulig deltakelse, kan klassen organiseres i grupper. Hver gruppe prøver å løse alle oppgavene, men de ulike gruppene kan begynne på forskjellige steder i oppgavesettet.

Læreren kan tegne opp et skjema på tavla over alle oppgavene og de ulike gruppene. Da ser en fort hvor svarene eventuelt skiller seg og hvor elevene må bruke noe tid på å diskutere seg frem til et felles svar.

Alle hjelpemidler er tillatt, unntatt Internett og andre verktøy som tillater kommunikasjon.

Totalt kan man få 40 poeng for oppgavesettet, maksimalt 5 poeng per oppgave. Det er kun nødvendig å vise utregning/framgangsmåte der dette er spesifisert.

Lykke til!

Oppgave 1: Far og datter

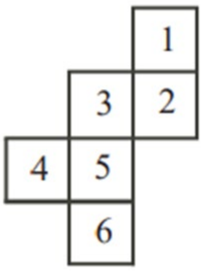
En far sier til sin datter: Nå er jeg tre ganger så gammel som deg, men om 14 år er jeg dobbelt så gammel som du er.

Hvor gammel er faren idet dette blir sagt?

Oppgave 2: Produkt

Figuren viser en utbrettet kube.

Bestem produktet av tallene på de fire sideflatene som har felles kant med 1-er-sideflaten på den opprinnelige kuben.



Oppgave 3: Innhegning

På en stor, rektangulær tomt med areal 80 000 m^2 planlegges det å anlegge en liten, kvadratisk innhegning for hester. Innhegningen skal gjerdes inn. Gjerdets totale lengde skal være en åttedel av tomtens langside og samtidig en firedel av tomtens kortside.

Beregn den totale lengden av gjerdet.

Vis utregning/framgangsmåte.

Oppgave 4: Løven og enhjørningen

En dag møtte Lise en løve og en enhjørning på skolen.
Løven lyver alltid hver mandag, tirsdag og onsdag,
men snakker alltid sant de andre dagene i uka.
Enhjørningen lyver alltid hver torsdag, fredag og lørdag,
men snakker alltid sant de andre dagene i uka.

«I går løy jeg!», sa løven til Lise.
«Det gjorde jeg også!», sa enhjørningen.

Hvilken ukedag var dette?

Oppgave 5: Sammenlikn tall

Anta at vi har fem positive tall: a, b, c, d og e. Tallet b er 25 % større enn tallet a. Tallet c er 20 % større enn tallet b. Tallet d er 10 % større enn tallet c, og tallet a er 40 % mindre enn tallet e.

Hvor mange prosent større eller mindre er tallet d enn tallet e?

Vis utregning/framgangsmåte.

Oppgave 6: Fem tosifrede tall

Vi er på jakt etter fem påfølgende positive, tosifrede tall. Følgende skal gjelde for disse:

Hvis vi bytter om sifrene i det største av de fem tallene, øker summen av tallene. Økningen er lik det opprinnelige gjennomsnittet av de fem tallene pluss en.

Hvor stort er det minste av de opprinnelige fem tallene?

Oppgave 7: Tallmaskin

Finn tallene i sirklene slik at alle summer og differanser stemmer.

○	+	○	=	8
+		+		
○	−	○	=	6
=		=		
13		8		

Skriv svaret som fire regnestykker.

Oppgave 8: Remseklipping

Anta at vi har et kvadratisk papir med sider 20 cm.

Vi klipper bort en 2 cm bred remse fra den høyre siden. Så roterer vi papiret 90^0 med klokka, og klipper igjen bort en 2 cm bred remse fra høyre side. Dette (rotasjon og klipp) gjentas til papiret tar slutt.

a) Hvor mange remser får vi totalt?

b) Hva er lengden av remse nummer fem?

c) Hvordan kan vi uttrykke lengden av remse nummer n?

Løsninger runde 2

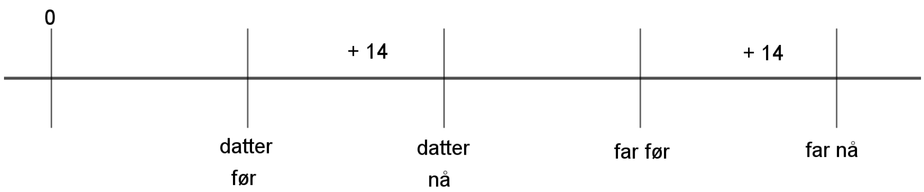
Alle oppgavene gis mellom 0 og 5 poeng utfra individuell vurdering. Totalt 40 poeng.

Oppgave 1: Far og datter

Hvis datteren nå er D år gammel, er faren 3D år gammel. Om 14 år er faren 3D + 14 år gammel, mens datteren er D + 14 år gammel. Hvis faren da skal være dobbelt så gammel som datteren, følger det at 2(D + 14) = 3D + 14, som gir 2D + 28 = 3D + 14, dvs D = 14. Faren er altså 3D (= 3·14) = 42 år gammel idet han sier dette.

Alternativ metode:

Plotte inn opplysningene på en tom tallinje. Da innser vi at tidsspranget på **14** år nødvendigvis også må være lik datterens nåværende alder, for da blir de nye aldrene henholdsvis 14+**14** og 14+14+14+**14**, som passer med at far da har blitt dobbelt så gammel som datteren, mens han nå er tre ganger så gammel.



Oppgave 2: Produkt

Ved å studere figuren, innser vi at 5-eren må være motstående sideflate til 1-eren. Nabosidene til 1-er-siden på den opprinnelige (sammenbrettede) kuben, er dermed nødvendigvis 2, 3, 4 og 6. Produktet av disse er dermed 2·3·4·6 = 144.

(En mulig metode kan naturligvis være å sjekke ved å klippe ut og brette kuben).

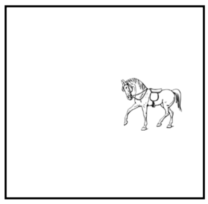
Oppgave 3: Innhegningen

Lengdene på tomtens langside og kortside kaller vi a og b henholdsvis, og gjerdelengden L. Har da

$L = \frac{a}{8} = \frac{b}{4}$ dvs $a = 8 \cdot \frac{b}{4} = 2b$ dvs tomtearealet er gitt ved $ab = 2b \cdot b = 2b^2$

Det gir likningen $2b^2 = 80\,000$ dvs $b^2 = 40\,000$ dvs $b = \sqrt{40\,000} = 200$

Lengden av gjerdet er dermed 50 m, siden 200/4 = 50
(Og innhegningen er altså et kvadrat med sider 12,5 m.)



Oppgave 4: Løven og enhjørningen

Utsagnet «I går løy jeg!» er bare mulig dersom det er sagt på en «lyvedag» som kommer rett etter en «santdag» ELLER dersom det er sagt på en «santdag» som kommer rett etter en «lyvedag».

For løven passer dette kun for mandag og torsdag.
For enhjørningen passer dette kun for torsdag og søndag.

Eneste mulige felles dag (der begge passer samtidig) er altså *torsdag*.

Oppgave 5: Sammenlikn tall

Vi har:

$b = 1{,}25\ a$ (fordi b er 25 % større enn a)

og $c = 1{,}20\ b = 1{,}20 \cdot 1{,}25\ a = 1{,}50\ a$ og $d = 1{,}10\ c = 1{,}10 \cdot 1{,}50\ a = 1{,}65\ a$

Samtidig har vi: $a = 0{,}60\ e$ (fordi a er 40 % mindre enn e), som gir

$$d = 1{,}65\ a = 1{,}65 \cdot 0{,}60\ e = 0{,}99\ e$$

Tallet d er altså 1 % mindre enn tallet e.

Observer at vi ikke kjenner de absolutte verdiene til de fem tallene, kun deres innbyrdes størrelsesforhold. Et *eksempel* på hvilke tall det kan være, er: $60 < 75 < 90 < 99 < 100$.

Oppgave 6: Fem tosifrede tall

En litt «brutal» metode kan her være å lete blant alle mulige remser av fem påfølgende, tosifrede tall – som det tross alt fins et overkommelig, begrenset antall av. (Fra og med den som remsen starter på 10, til og med den remsen som starter på 95.) Kanskje kan vi programmere et regneark til å gjøre de nødvendige kontrollregningene for oss. Og derved også øke våre ferdigheter i bruk av regneark…?

Det viser seg da at de fem tallene må være 33, 34, 35, 36 og 37. Det minste tallet er altså 33. (Summen er 145 og middelverdien 35. Byttes sifrene i 37 om til 73, øker summen med 36.)

Men kanskje kan det være interessant å gjøre letearbeidet litt mindre ved å bruke hodet litt? Dersom vi kaller det laveste tallet L, vil de fem tallene være L, L+1 L+2, L+3 og L+4. Da er det mulig å resonnere* seg fram til at L+3 må være et tosifret tall i 9-gangen - nærmere bestemt det tallet i 9-gangen vi får ved å multiplisere differansen mellom sifrene i L+4 med 9. Og i L+4 må tiersifferet være mindre enn enersifferet.

Plutselig er det da bare fire kandidater for tallet L+3, nemlig 18, 27, 36, 45. Vi sjekker her raskt at 36 er den eneste som oppfyller de opprinnelige kravene. (Sifferdifferansen i 37 er 4, og $9 \cdot 4 = 36$.) De fem tallene er dermed 33, 34, 35, 36 og 37.

*Resonnementet kan f.eks gå slik:
For tallene L, L+1, L+2, L+3 og L+4 er middelverdien L+2 (det midterste tallet), og summen er 5L + 10. Når vi gjør endringer i det største tallet, skal summen øke med én mer enn den opprinnelige middelverdien. Da må altså summen øke med (L+2)+1, altså med L+3.

Siden de fire første tallene forblir uberørte, vil det kun være endringen i det største tallet som bidrar til endringen i summen av de fem tallene. Vi konsentrerer oss derfor nå om å studere hva som skjer med verdien når vi bytter om på sifrene i et tosifret tall.

Vi lar her skrivemåten [mn] bety et tosifret tall med sifre m og n.
[mn] har da verdien $10m + n$ mens det ombyttede tallet, [nm], har verdien $10n + m$.

Differanse: $(10n + m) - (10m + n) = 10n + m - 10m - n = 9n - 9m = 9(n - m)$

Differansen er altså delelig med 9, nærmere bestemt 9 ganger differansen mellom n og m.
Og, siden summen skal øke (positiv differanse), må $m < n$.

Oppgave 7: Tallmaskin

Kaller de ukjente sirkeltallene for a, b, c og d.
Det gir følgende krav:

(1) $a + b = 8$ (2) $a + c = 13$ (3) $b + d = 8$ (4) $c - d = 6$

Løser likningene, og får

$a = \frac{7}{2}$, $b = \frac{9}{2}$, $c = \frac{19}{2}$ og $d = \frac{7}{2}$

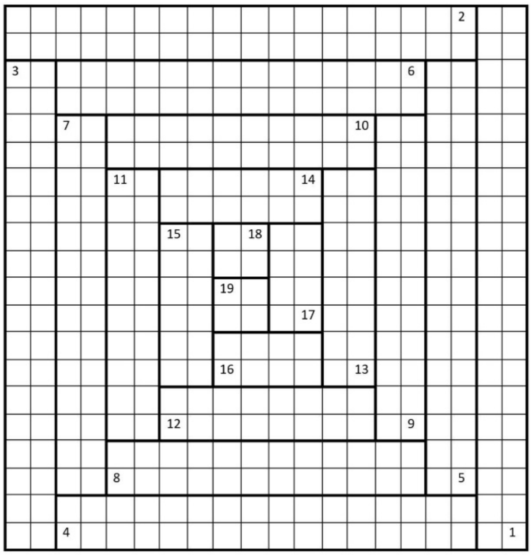
$\frac{7}{2}$	$+$	$\frac{9}{2}$	$=$	8
$+$		$+$		
$\frac{19}{2}$	$-$	$\frac{7}{2}$	$=$	6
$=$		$=$		
13		8		

Flere måter å gjøre dette på, for eksempel slik:
Adderer (3) og (4), og finner at $b + c = 8 + 6 = 14$, dvs at $c = 14 - b$
Setter vi dette inn i (2), følger at $a + (14 - b) = 13$, dvs at $a - b = -1$
Adderer vi denne med (1), følger at $2a = 8 + (-1) = 7$, og dermed at $a = \frac{7}{2}$
Så kan vi arbeide oss baklengs med denne verdien.
Fra (1) følger at $b = 8 - a = 8 - \frac{7}{2} = \frac{9}{2}$
Fra (2) følger at $c = 13 - a = 13 - \frac{7}{2} = \frac{19}{2}$, og fra (3) følger $d = 8 - b = 8 - \frac{9}{2} = \frac{7}{2}$

Som regnestykker kan dette skrives:
3,5+4,5 =8
9,5-3,5=6
3,5+9,5=13
4,5+3,5 =8

Oppgave 8: Remseklipping

a)
Vi lager en skisse som viser det som foregår, eller rett og slett utfører klippingen selv.
Vi ser at vi får i alt 19 remser.



b) Av tegningen til høyre ser vi at remse nummer fem blir 16.

c) Vi legger merke til at, med unntak for den aller første remsen, blir to og to remser like lange.
1 (lengde 20)
2 og 3 (lengde 18)
4 og 5 (lengde 16)
6 og 7 (lengde 14) osv … osv …

Remse nr. n har lengde 21 – n når n er et oddetall, og lengde 20 – n når n er et partall.

En kan gjøre skrivemåten enda mer komprimert, for eksempel:
$L(n) = 20 - n + \frac{1}{2}(1 - (-1)^n).$