Oppgaver runde 1: 5. – 29. november 2019

Maksimal tid som kan brukes i elevgruppa/klassen er 90 minutter. Om flere elevgrupper fra samme skole deltar oppfordrer vi til at konkurransen gjennomføres samtidig for alle gruppene/klassene.

For å oppnå størst mulig deltakelse og engasjement i klassen, kan klassen organiseres i grupper på fire mens de løser oppgavene. Hver gruppe prøver å løse alle oppgavene, men de ulike gruppene kan begynne på forskjellige steder i oppgavesettet, slik at klassen rekker alle oppgavene. På denne måten vil også læreren ha mulighet til å differensiere i forhold til oppgavenes vanskelighetsgrad. Læreren kan tegne opp et skjema på tavla over alle oppgavene og de ulike gruppene. Da ser en fort hvor svarene eventuelt skiller seg og hvor elevene må bruke noe tid på å diskutere seg frem til et felles svar.

Alle hjelpemidler er tillatt, unntatt Internett og andre verktøy som tillater kommunikasjon.

Lykke til!

Forslag til skjema (noen oppgaver vil trenge mer plass, dette er kun et eksempel):

Oppgave nr	Gruppe 1	Gruppe 2	Gruppe 3	Gruppe 4	Gruppe 5	Gruppe 6	Gruppe 7
1							
2							
3							
4							
5							
6							
7							
8							

MERK:
Totalt kan man få 40 poeng for oppgavesettet, maksimalt 5 poeng per oppgave.
Det blir trukket 1 poeng for hver feil løsning, men man kan ikke få mindre enn 0 poeng per oppgave.

Oppgave 1: Den tjuefjerde eleven

I en skoleklasse deltok 23 av 24 elever på en prøve. De 23 elevene fikk i gjennomsnitt 18 av 30 mulige poeng på prøven. Den tjuefjerde eleven skulle ta prøven seinere.

Med hvor mange poeng kan den siste eleven maksimalt forbedre klassens gjennomsnitt på denne prøven?

Oppgave 2: Kortstokken som mangler kort

I en vanlig kortstokk skal det være 52 kort, men i vår kortstokk mangler det noen kort. Hvis vi deler ut kortene (likt) til fire personer, vil det bli det tre kort til overs. Hvis vi deler ut kortene (likt) til tre personer, vil det bli to kort til overs. Hvis vi deler ut kortene (likt) til fem personer, vil det også bli to kort til overs.

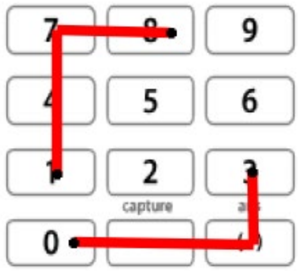
Hvor mange kort er det i denne kortstokken?

Oppgave 3: Regulære polygoner (mangekanter)

I et gitt regulært polygon er den indre vinkelen i hvert av hjørnene 165°.

Hvor mange hjørner er det i dette polygonet?

Oppgave 4: Kalkulatoren



Anta at vi har en kalkulator som kan vise ti-sifrede tall. Med denne skal vi forsøke å skrive ti-sifrede, hele tall ved å hoppe fra knapp til knapp på samme måte som en springer gjør i sjakk, dvs enten to steg i én retning og så ett til siden, eller ett steg i én retning og så to til siden. Bildet til høyre viser to eksempler. I det ene eksempelet har vi hoppet fra 1 til 8, mens i det andre fra 3 til 0. Bildet under viser de tolv aktuelle knappene vi har, nemlig ti sifferknapper og knappene for henholdsvis . og (-).

Vi er bare interessert i å skrive ti-sifrede tall der alle de ti sifrene er forskjellige. Det første sifferet kan ikke være 0, og vi kan heller ikke tillate oss noen gang å lande på . eller (-).

Hvilke slike ti-sifrede tall er det mulig å skrive på denne måten?

Oppgave 5: Emmas tall

«Emmas tall» er alle naturlige tall som oppfyller alle de følgende fire betingelser:

B1: Tallet er tresifret.
B2: Det første sifferet er større enn det andre sifferet.
B3: Det tredje sifferet er lik summen av de to første sifrene.
B4: Tallet er et primtall.

Finn alle «Emmas tall».

Oppgave 6: Osten

En ost har form som en kube, og har volum 125 cm^3.

a) Anta at osten skjæres med snitt parallelle med sideflatene, i enten
   i) To like store biter eller
   ii) Tre like store biter

Finn det samlede overflatearealet for hver av disse tilfellene.

b) Anta at vi deler osten i like store biter med **n** parallelle snitt.
   Finn et uttrykk for det samlede overflatearealet vi da får.

Oppgave 7: Tallet nedenfor

Betrakt tallene i tabellen:

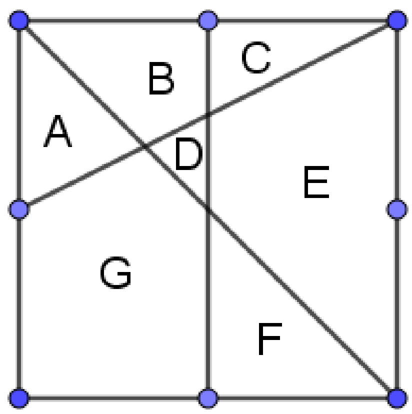
			1			
		2	3	4		
	5	6	7	8	9	
10	11	12	13	14	15	16

Her ser vi f.eks at 15 står rett under 9.
Vi tenker oss at tabellen kan utvides og utvides i det uendelige.
Hvilket tall kommer da til å stå rett under tallet 9801?

Oppgave 8: Hvor stor brøkdel?

Et kvadrat er delt inn i sju områder slik figuren viser.
De markerte punktene er enten hjørner eller midtpunkter på kvadratsidene.

Hvor stor del av hele kvadratet utgjør areal D? Gi svaret som brøk.



Løsninger runde 1

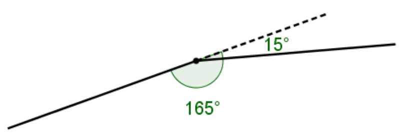
Oppgave 1: Den tjuefjerde eleven

Poengsummen til de 23 første elevene er 414 (= 23·18). Maksimal poengsum inklusiv den tjuefjerde eleven er da 444 (= 414+30), og gjennomsnittet blir da 18,5 (= 444/24).
Den tjuefjerde eleven kan altså maksimalt heve poengsnittet med 0,5 poeng.
0 eller 5 poeng

Oppgave 2: Kortstokken som mangler kort

Det gjelder å finne et antall (mindre enn 52) som gir rest 3 ved divisjon med 4, og rest 2 ved divisjon med henholdsvis 3 og 5. Det kan f.eks gjøres ved å legge til 3 på alle tall i 4-gangen, legge til 2 på alle tall i 3-gangen og legge til 2 på alle tall i 5-gangen. Så sammenlikner vi de tre tabellene vi får, og ser om det finnes noe tall som forekommer i alle tre. Det viser seg å være én mulig løsning, nemlig 47 kort.
0 eller 5 poeng

Oppgave 3: Regulære polygoner (mangekanter)

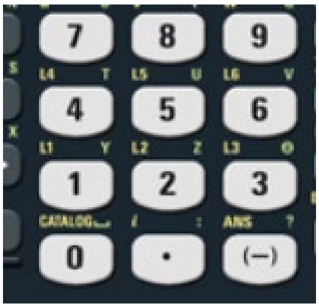


Følger vi figuren langs kantene én runde, må vi i alt dreie 360°. Dette skal fordeles likt på n hjørner, slik at supplementvinkelen (som nå tilsvarer den indre vinkelen i hvert hjørne) er 165°.
Vi må dreie 15° (= 180°–165°) ved hvert hjørne. Mangekanten 24 (= 360°/15°) har hjørner.
0 eller 5 poeng

Oppgave 4: Kalkulatoren

Det kan være nyttig å lage en liste over hvilke «springernaboer» (altså sifre som kan nås med ett lovlig hopp) de ulike sifrene har:

siffer 0	har	naboer 3 og 5
siffer 1	har	naboer 6 og 8
siffer 2	har	naboer 7 og 9
siffer 3	har	naboer 0, 4 og 8
siffer 4	har	naboer 3 og 9
siffer 5	har	nabo 0
siffer 6	har	naboer 1 og 7
siffer 7	har	naboer 2 og 6
siffer 8	har	naboer 1 og 3
siffer 9	har	naboer 2 og 4



Her kan vi legge merke til at siden sifferet 5 kun har én slik nabo, må alle korrekte løsninger enten begynne eller slutte med sifferet 5. Og enhver løsning vi måtte finne, kan også hoppes baklengs, og på den måten gi opphav til en ny løsning.

Totalt gir dette oss fire løsninger:

5034927618 med baklengsvarianten 8167294305

og 5038167294 med baklengsvarianten 4927618305

Poenggivning:
Alle fire rett 5 poeng.
Tre rett 4 poeng.
To rett 3 poeng.
Et rett 2 poeng.
Og om man i tillegg har noen feil så trekkes et poeng per feil, men aldri mindre enn 0.

Oppgave 5: Emmas tall
Vi kan f.eks velge å notere Emmas tall som [a b c] der a, b og c er de tre sifrene (krav B1). Så kan vi forutsette at a > b (krav B2) og at a+b = c (krav B3). Siden tallet skal være primtall (krav B4), vet vi at c må være et oddetall, og dessuten forskjellig fra 5, for ellers blir tallet delelig med 2 eller 5.

Vi sitter da igjen med følgende tolv kandidater:

101, 213, 303, 437, 527, 549, 617, 639, 707, 729, 819 og 909

Her kan vi f.eks arbeide videre med å sjekke delelighet med 3 og 9 ved tverrsumtesting osv. osv…, eller rett og slett sjekke hvilke av disse som er primtall ved å se etter i en tabell over primtall. Det viser seg å være to, dvs det fins nøyaktig to «Emmas tall», nemlig 101 og 617.
Poengfordeling:
Alle rett 5.
Kun et rett 2.
Et rett og et galt 1.
Et rett og to eller flere galt 0.
To rett og et galt 3.
To rett og to feil 2.
To rette og flere enn to feil 1.

Oppgave 6: Osten
Lengden av hver sidekant i ostekuben er 5 cm, siden volumet er 125 cm^3 (= 5^3 cm^3).
Hver kvadratiske sideflate har dermed areal 25 cm^2 (=5^2 cm^2), dvs ostens totale overflateareal er 150 cm^2 (= 6·25 cm^2). For hvert parallelle kutt gjennom osten, vil den totale overflaten av alle ostebitene øke med to kvadrater á 25 cm^2, nemlig de to snittflatene som er henholdsvis over og under kniven. Altså gir hvert snitt en økning på 50 cm^2 totalt.

a)

i) Ett parallelt snitt (to biter) gir totalareal 200 cm^2 (=150 cm^2 + 1·50 cm^2)

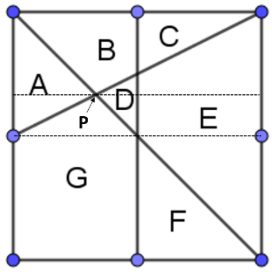
ii) To parallelle snitt (tre biter) gir totalareal 250 cm^2 (=150 cm^2 + 2·50 cm^2)

b)
Generelt: n parallelle snitt (n+1 biter) gir totalareal 150 + 50n (målt i cm^2).
1 poeng for a)i) + 1 poeng for a)ii). Maksimalt 3 poeng for b).

Oppgave 7: Tallet nedenfor
For hver nye rad øker antallet tall på raden med to. Det fører til at å hoppe fra et tall i en etasje til tallet i etasjen under tilsvarer henholdsvis +2, +4, +6, +8 osv. (+2 tilsvarer ett etasjehopp ned fra 1.etasje, +4 tilsvarer ett etasjehopp fra 2.etasje, osv…) Så dersom vi kjenner etasjenummeret n til et tall t, vet vi også at tallet rett under vil være t + 2n.

Vi kan også observere at tallet ytterst til høyre i hver rad er kvadrattallene 1^2, 2^2, 3^2, 4^2, osv… og siden tallet 9801 kvadrattall nummer 99 (fordi $99^2 = 9801$), vet vi at 9801 står ytterst til høyre på rad nummer 99. Og tallet rett under 9801 må da være 9999 (= 9801 + 2·99).
0 eller 5 poeng

Oppgave 8: Hvor stor brøkdel?
Vi betrakter det øvre venstre kvadratet (heretter omtalt som «det lille kvadratet», dvs ¼ av hele figuren) som bl.a inneholder områdene A, B og D.



På grunn av parvis like vinkler, er områdene A og D er formlike, og med lineærforholdstall 2 : 1. Fra deres felles toppunkt (P i hjelpefiguren) kan vi nedfelle høyder (stiplet) på sidene i det lille kvadratet, og vi får da at høyden i område D er lik 1/3 av sidekanten i det lille kvadratet.

Med grunnlinje av D lik 1/2 av sidekanten i det lille kvadratet, og høyden av D lik 1/3 av sidekanten i det lille kvadratet, følger det at arealet av D er 1/12 av det lille kvadratet.

Og fordi det lille kvadratet er ¼ av hele figuren, følger det nå at D utgjør 1/48 av hele figuren.
0 eller 5 poeng

Oppgaver runde 2: 2. - 28. januar 2020

Maksimal tid som kan brukes i elevgruppa/klassen er 90 minutter. Om flere elevgrupper fra samme skole deltar oppfordrer vi til at konkurransen gjennomføres samtidig for alle gruppene/klassene.

For å oppnå størst mulig deltakelse og engasjement i klassen, kan klassen organiseres i grupper på fire mens de løser oppgavene. Hver gruppe prøver å løse alle oppgavene, men de ulike gruppene kan begynne på forskjellige steder i oppgavesettet, slik at klassen rekker alle oppgavene. På denne måten vil også læreren ha mulighet til å differensiere i forhold til oppgavenes vanskelighetsgrad. Læreren kan tegne opp et skjema på tavla over alle oppgavene og de ulike gruppene. Da ser en fort hvor svarene eventuelt skiller seg og hvor elevene må bruke noe tid på å diskutere seg frem til et felles svar.

Alle hjelpemidler er tillatt, unntatt Internett og andre verktøy som tillater kommunikasjon.

Lykke til!

Forslag til skjema (noen oppgaver vil trenge mer plass, dette er kun et eksempel):

Oppgave nr	Gruppe 1	Gruppe 2	Gruppe 3	Gruppe 4	Gruppe 5	Gruppe 6	Gruppe 7
1							
2							
3							
4							
5							
6							
7							
8							

MERK:

Totalt kan man få 40 poeng for oppgavesettet, maksimalt 5 poeng per oppgave.

Det blir trukket 1 poeng for hver feil løsning, men man kan ikke få mindre enn 0 poeng per oppgave.

Oppgave 1: Et spesielt tall

Hvilket er det største, tosifrede, naturlige tall som er sju ganger så stort som summen av sine to sifre?

Oppgave 2: Mange diagonaler

a)

Bestem antall diagonaler i en regulær mangekant

i) med 5 hjørner

ii) med 10 hjørner

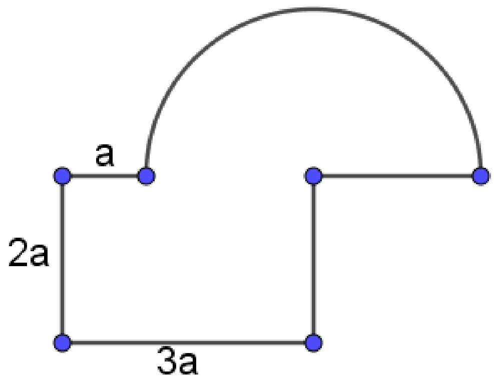
b)

Hvor mange hjørner har en regulær mangekant dersom den har nøyaktig 989 diagonaler?

Oppgave 3: En arealformel

Figuren består av en halvsirkel og et rektangel.

Finn en formel for arealet av figuren.



Oppgave 4: Kjølevæske

I en stor beholder har vi 21 liter væske. Av dette er 25 % ren kjølevæske, mens resten er rent vann.

Hvor mange liter ren kjølevæske må vi tilsette dersom vi ønsker at kjølevæske skal utgjøre 30 % av den samlede væskemengden i beholderen?

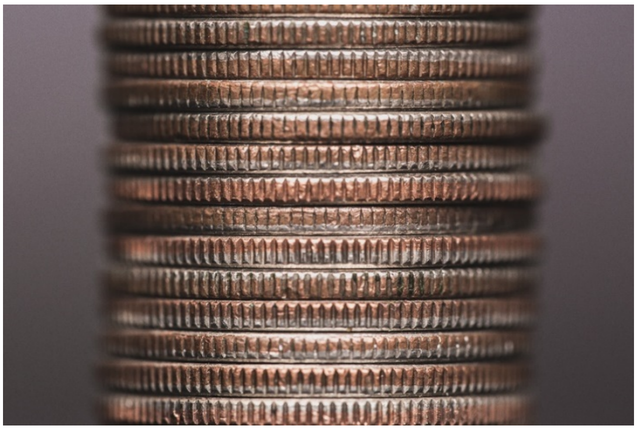
Oppgave 5: Tall på en tallinje

Tre tall A, B og C ligger på ei tallinje. Avstanden mellom A og B er 7,5.
For tallet C gjelder det at lengden av linjestykket AC forholder seg til lengden av linjestykket BC som 4 : 1.
Beregn lengden av linjestykket AC.

Oppgave 6: Bunker av euromynt

Kim har 76 én-euro-mynter. Han vil samle alle disse myntene i bunker, og hver bunke får kun lov å inneholde enten fem eller tre mynter.
Én mulighet er da å lage 14 bunker med fem mynter i hver, og 2 bunker med tre mynter i hver. ($14 \cdot 5 + 2 \cdot 3 = 76$)

Hvilke andre muligheter har Kim?

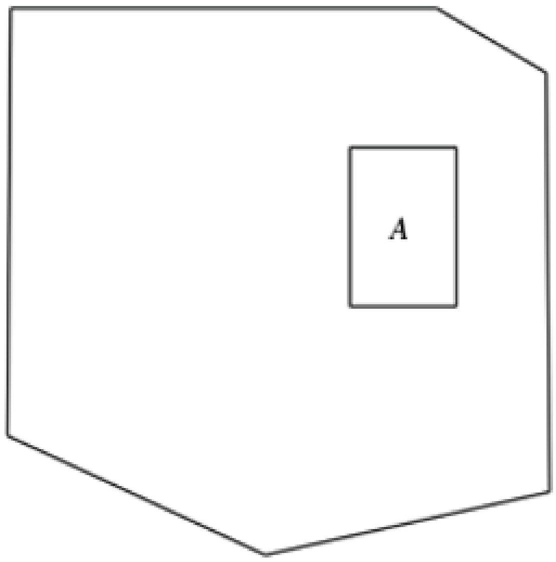


Oppgave 7: Robotgressklipperen Robben

Robotgressklipperen Robben klipper gress på et område som også inneholder et rektangulært grønnsaksbed. Grønnsaksbedet er adskilt fra gressplenen med en nedgravd grensetråd, som sørger for å holde Robben unna grønnsakene.

Hvor mye lengre må grensetråden være dersom vi istedenfor å legge den helt inntil grønnsaksbedet, plasser den slik at avstanden mellom grensetråden og nærmeste punkt på grønnsaksbedet overalt er eksakt 0,50 meter?

(Vi antar at plenen er stor nok til dette.)



A = grønnsaksbedet

Oppgave 8: Bestem en differanse

Bestem differansen mellom følgende to summer:

Summen av alle naturlige tall mindre enn eller lik 100 som er delelige med 2.

og

Summen av alle naturlige tall mindre enn eller lik 100 som er delelige med 3.

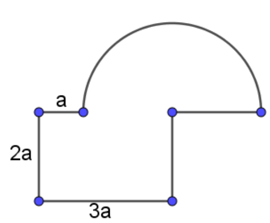
Løsninger runde 2

Oppgave 1: Et spesielt tall
Vi kan tenke oss tallet skrevet som [ab], med a og b som sifre. Tallets verdi er da $10a + b$, og vi krever altså at dette skal ha samme verdi som $7(a+b)$.
Det gir likningen $10a + b = 7(a + b)$, som vi løser og får $a = 2b$.
Mulige slike tosifrede tall er dermed 21, 42, 63 og 84, og av disse er det 84 som er størst.
0 eller 5 poeng

Oppgave 2: Mange diagonaler
a)
i) Fra hvert av de fem hjørnene i en slik 5-kant kan vi sette av et linjestykke til hvert av de andre to (= 5–3) hjørnene som ikke er nærmeste nabo. (Sidekantene i 5-kanten regnes ikke som diagonaler.) Det gir oss $5 \cdot 2 = 10$ linjestykker, men da er alle linjestykker satt av to ganger. Så vi må dividere med 2 for å få det riktige antallet diagonaler, altså $10/2 = 5$.
(Har vi først lagd et linjestykke fra P til Q, trenger vi jo ikke lage et nytt fra Q til P.)

ii) For 10-kanten får vi $10 \cdot (10–3)$ «doble linjestykker», altså $½ \cdot 10 \cdot 7 = 35$ diagonaler.
1 poeng for i) og 1 poeng for ii)

b) For en generell n-kant får vi $n(n–3)$ slike «doble linjestykker», og dermed $½ \cdot n \cdot (n–3)$ diagonaler. En regulær 46-kant har 989 diagonaler, fordi $½ \cdot 46 \cdot (46–3) = 989$.
0 eller 3 poeng

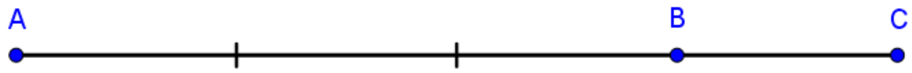


Oppgave 3: En arealformel
Rektangelet har areal gitt ved: $2a \cdot 3a = 6a^2$.
Halvsirkelen har areal gitt ved: $\frac{1}{2} \pi (2a)^2 = 2\pi a^2$

Totalt har altså figuren areal gitt ved summen: $\mathbf{6a^2 + 2\pi a^2 = (6 + 2\pi)a^2}$ **(** $\mathbf{\approx 12{,}28\ a^2}$ **)**
Maksimalt 5 poeng.

Oppgave 4: Kjølevæske
Vi kan tenke oss at vi tilfører k liter ren kjølevæske (konsentrat). Vi har da totalt 21 + k liter blandingsvæske, hvorav (21/4) + k liter er ren kjølevæske. (25 % av 21 tilsvarer jo ¼ av 21.) Det nye blandingsforholdet er dermed ((21/4) + k) / (21 + k) = 0,30 (= 30 %). Løser likningen, og finner at k = 1,5 – dvs vi må tilføre 1,5 liter ren kjølevæske for å oppnå ønsket blanding.
0 eller 5 poeng

Oppgave 5: Tall på en tallinje



Dersom vi deler intervallet AB opp i tre like store biter, og legger ut én av disse lengdene til høyre for B, havner vi i punktet C. For da har vi at AC er 4 ganger så lang som BC, og alt i alt:

$$AC = AB + BC = 7{,}5 + (7{,}5/3) = 7{,}5 + 2{,}5 = 10$$

0 eller 5 poeng

Oppgave 6: Bunker av euromynt

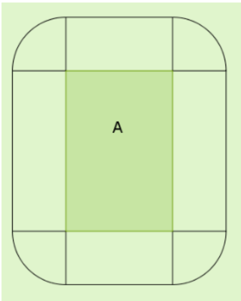
Vi kan legge merke til at 3 bunker med fem mynter i hver inneholder like mange mynter som 5 bunker med tre mynter i hver. ($3·5=5·3$) Det gjør at vi kan arbeide oss «nedover» fra eksempelet i oppgaven (eventuelt oppover, om det var mulig), i sprang på 3 femmere ned og 5 treere opp.

Det gir fire muligheter i tillegg til eksempelet i oppgaven:

11 bunker med fem mynter i hver, og 7 bunker med tre mynter i hver. ($11·5 + 7·3 = 76$)
8 bunker med fem mynter i hver, og 12 bunker med tre mynter i hver. ($8·5 + 12·3 = 76$)
5 bunker med fem mynter i hver, og 17 bunker med tre mynter i hver. ($5·5 + 17·3 = 76$)
2 bunker med fem mynter i hver, og 22 bunker med tre mynter i hver. ($2·5 + 22·3 = 76$)

Poenggivning:
Alle fire rett 5 poeng.
Tre rett 4 poeng.
To rett 3 poeng.
Et rett 2 poeng.
Og om man i tillegg har noen feil så trekkes et poeng per feil, men aldri mindre enn 0.

Oppgave 7: Robotgressklipperen Robben



Vi kan se for oss at den nye grensetråden består av fire kvartsirkler og fire linjestykker. Linjestykkene er til sammen like lange som omkretsen av grønnsaksbedet, mens kvartsirklene til sammen utgjør en hel sirkel med radius 0,5. Omkretsen av denne sirkelen er dermed like lang som den ekstralengden vi er på jakt etter, dvs grensetrådens ekstralengde er $2·\pi·0{,}5 = \pi \approx 3{,}14$ (meter).

0 eller 5 poeng

Oppgave 8: Bestem en differanse

Kjenner vi til trekanttall og deres generelle formelen $T_n = \frac{1}{2}\cdot n(n+1)$, er det greit å bruke den:

Sum av «toere» = $2+4+6+ \ldots +98+100 = 2\cdot(1+2+3+\ldots+49+50) = 2\cdot T_{50} = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot 50\cdot 51 = 2550$

Sum av «treere» = $3+6+9+ \ldots +96+99 = 3\cdot(1+2+3+\ldots+32+33) = 3\cdot T_{33} = 3\cdot\frac{1}{2}\cdot 33\cdot 34 = 1683$

Differanse = $2550 - 1683 = 867$

Alternativt, kan vi unngå bruk av trekanttallformelen ved f.eks å summere tallpar:

$2+4+6+ \ldots +98+100 = (2+100) + (4+98) + \ldots + (50+52) = 25\cdot 102 = 2550$
(25 par, hver med sum 102.)

$3+6+9+ \ldots +96+99 = (3+99) + (6+96) + \ldots + (48+54) + 51 = 16\cdot 102 + 51 = 1683$
(16 par, hver med sum 102, samt én enslig 51. Eller: 16,5 par, hver med sum 102.)

Summeringene kan naturligvis også utføres direkte. Mer jobb, og kanskje litt kjedelig.

0 eller 5 poeng