OPPGAVENE SEMIFINALE 2019

Semifinaleoppgavene

Hver oppgave gir maksimalt 5 poeng. Dere må vise utregning.
Dersom en oppgave har mer enn én løsning, vil det å vise flere løsninger belønnes.

Fylke: ___________________________________

Oppgave 1 Besøk på en utstilling

En gruppe på 20 personer betalte i alt 20 £ for å se en utstilling.
Billettprisene var 3 £ pr. voksen, 2 £ pr. ungdom under 20 år, og 50 p pr. barn under 12 år.
(1 £ = 1 britisk pund = 100 pence = 100 p)

Alle de tre kategoriene (voksen, ungdom, barn) var representert blant de 20 personene.
Hvor mange personer var det i hver av disse kategoriene?

Svar:

Antall barn: _________________

Antall ungdommer: _________________

Antall voksne: _________________

Slik fant vi svaret:

Oppgave 2 Hvor mange kvadrater kan vi lage på geobrettet?

Materiell: Ark med «geobrett» av typene 5x5 (25 spiker) og 6x6 (36 spiker).

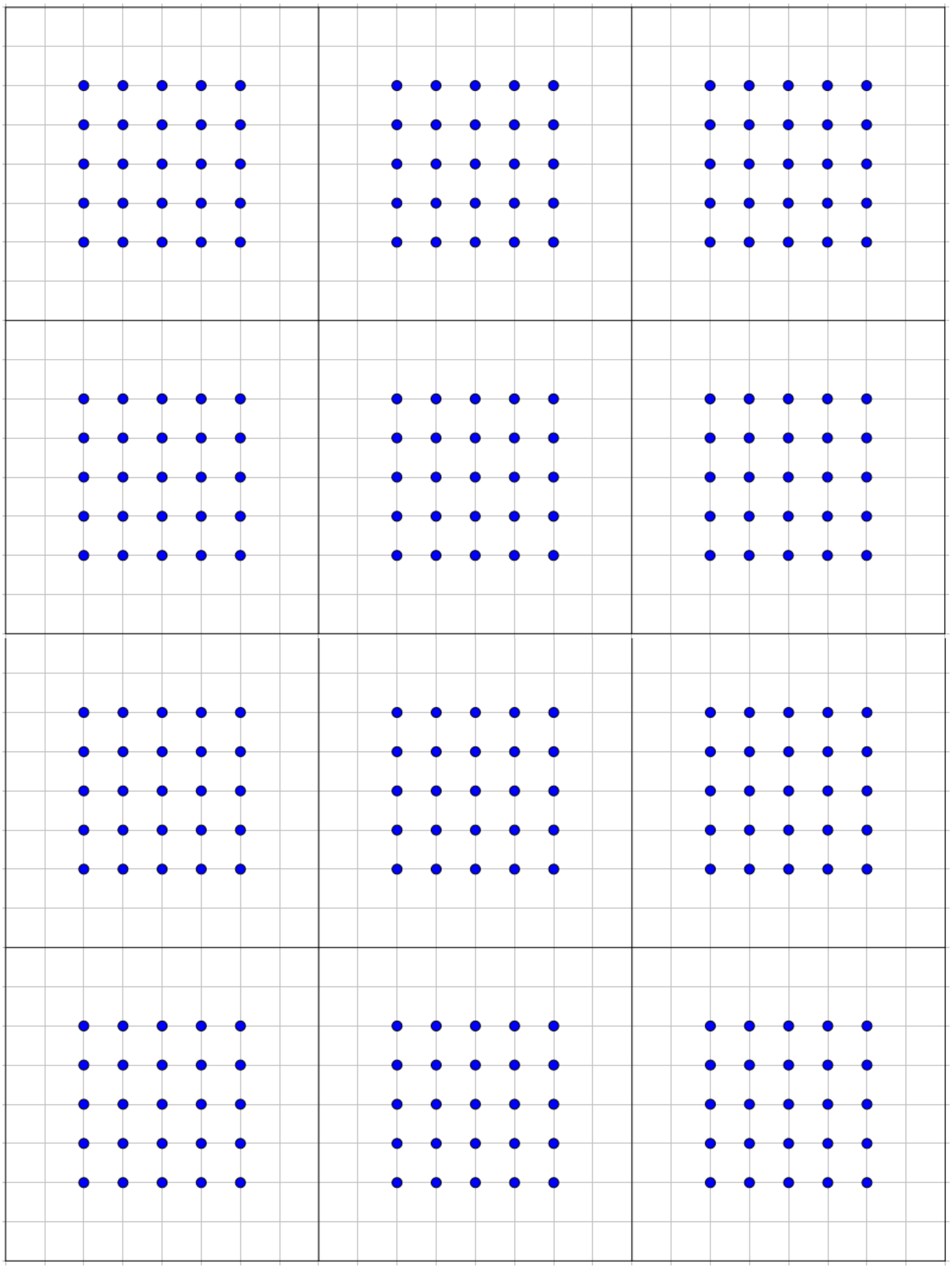
Merk! Sidene i kvadratene skal være parallelle med sidekantene på geobrettet!

Hvor mange kvadrater kan lages på et 5×5-geobrett?

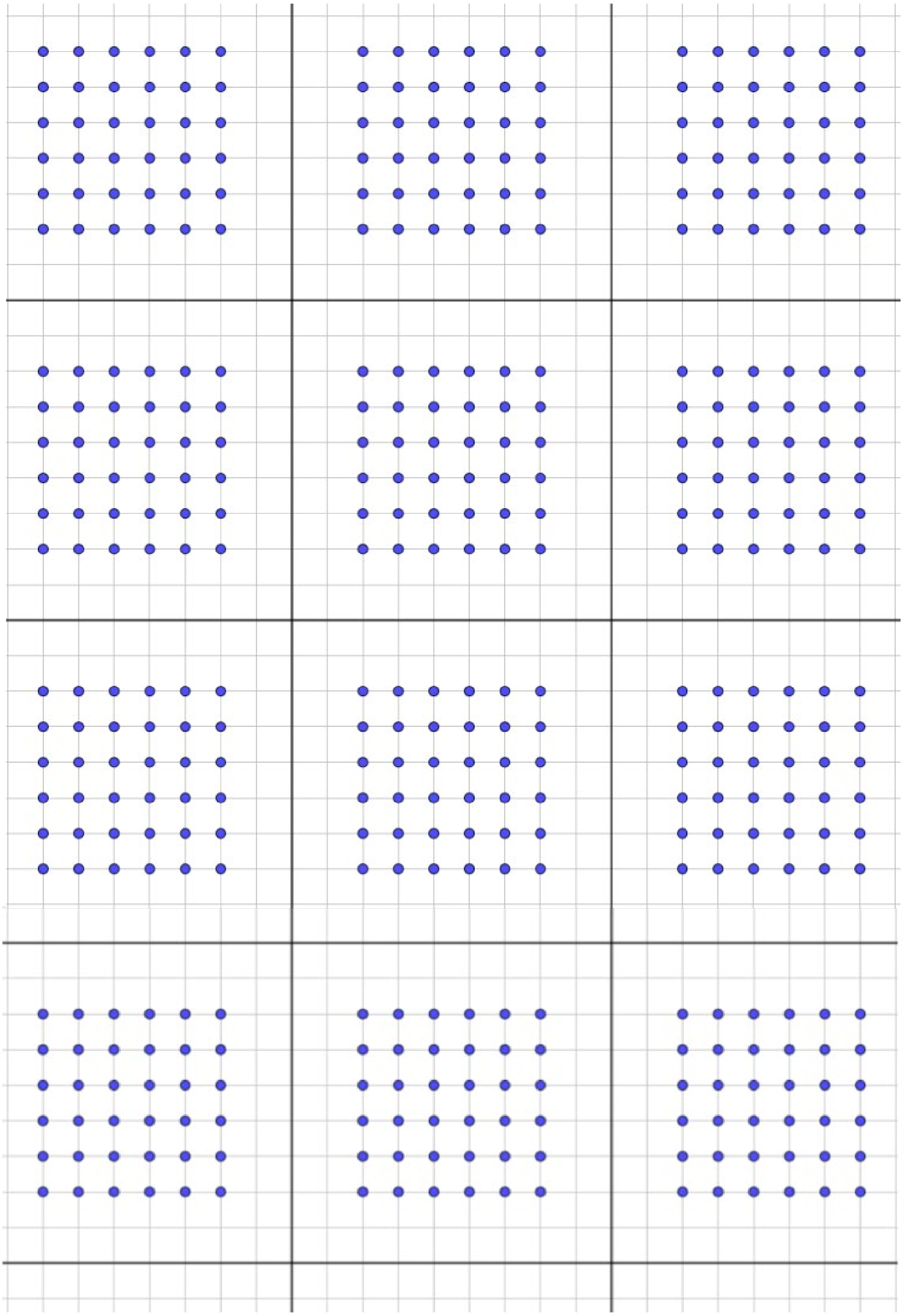
Hvor mange kvadrater kan lages på et 6×6-geobrett?

Hvor mange kvadrater kan lages på et n×n-geobrett?
(Altså: Beskriv generelt hvordan vi kan regne ut dette antallet.)

Vedlegg til oppgave 2 - ”Geobrett” av typen 5×5



Vedlegg til oppgave 2 - ”Geobrett” av typen 6×6



Fylke: ___________________________________

Svarark Oppgave 2:

Svar:

Slik fant vi svaret:

Fylke: ______________________________________

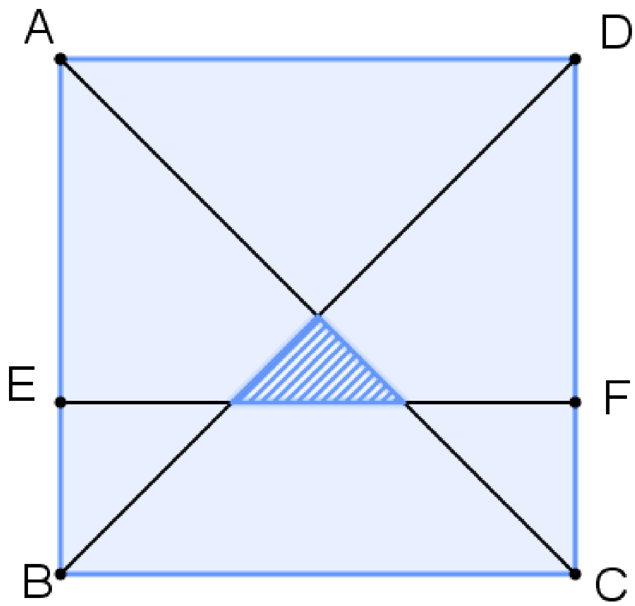
Oppgave 3 Hvor stor brøkdel?

På denne figuren er AB : BE = 3 : 1

og EF er parallell med BC.

Hvor stor brøkdel av kvadratet ABCD

utgjør det skraverte området?

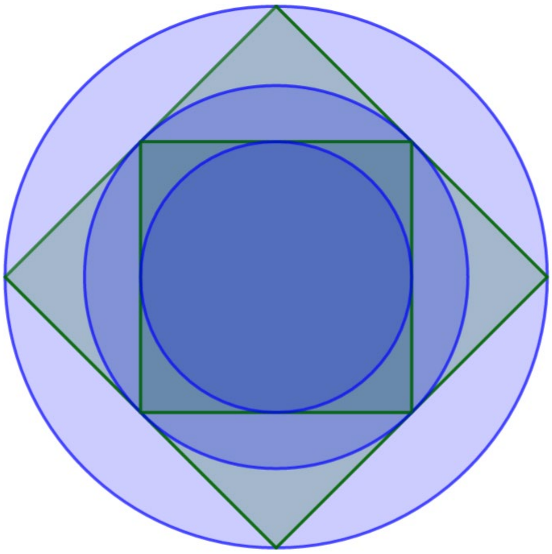


Svar:
Brøkdelen er ________________________________

Slik fant vi svaret:

Fylke: ______________________________________

Oppgave 4 Finn forholdet



Anta at en sirkel omskrives av et kvadrat. Kvadratet omskrives så av en ny sirkel. Denne sirkelen omskrives av et nytt kvadrat, osv… osv…

Skissen til høyre antyder hvordan de første stegene vil se ut.

Finn *forholdet* mellom arealene av to påfølgende sirkler (altså forholdet mellom arealet av en sirkel og arealet av dens nærmeste nabosirkel).

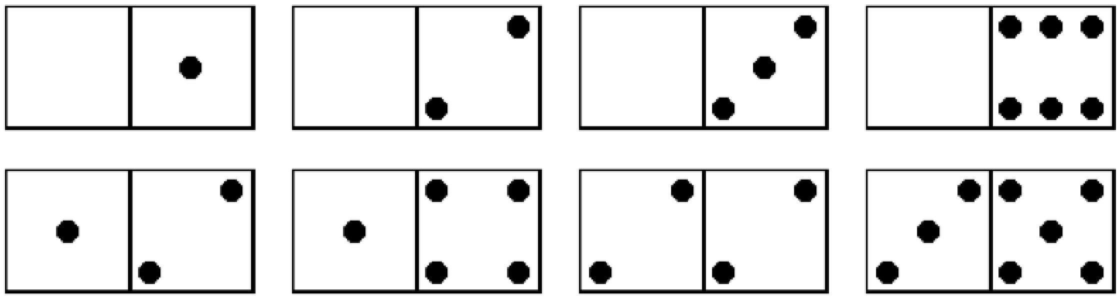
Svar:

Forholdet er ______________________

Slik fant vi svaret:

Oppgave 5 Domino

Materiell: Ark med fire sett «dominobrikker». Hvert sett er likt som settet vist nedenfor.

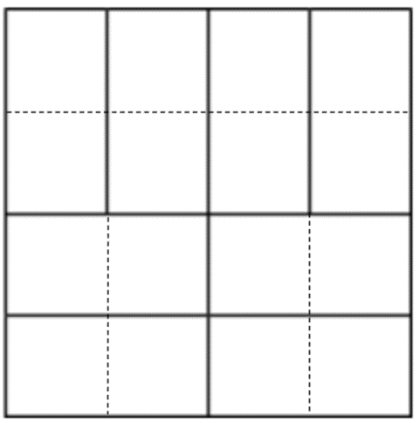


Bruk de åtte dominobrikkene til å lage et kvadrat der summen av hver av de fire loddrette radene er 8, og samtidig som summen av hver av de fire vannrette radene er 8.

Det skal ikke være mellomrom mellom brikkene.

Tegn løsningen deres på svararket.

Eksempel på hvordan brikkene kan ligge for å danne et kvadrat:



Semifinale 2019

Fylke: ___________________________________

Svarark Oppgave 5:

Tegn løsningen her.

Fylke: ___________________________________

Oppgave 6 Finn A, B og C

Hjelpemiddel: Kalkulator.

Bestem verdien til de tre positive heltallene A, B og C, gitt følgende opplysninger:

1) $A \cdot B + C = 72$

2) $B \cdot C + A = 126$

3) $C \cdot A + B = 82$

Svar:

A er __________

B er __________

C er __________

Slik fant vi svaret:

LØSNINGER SEMIFINALE 2019

Oppgave 1 Besøk på en utstilling

Vi kan først observere at antall barn må være et partall, siden billettprisen for barn er 0,5 £ mens summen er 20 £, altså heltallig. Videre må antall barn være en god del større enn antallet i de andre to kategoriene, siden de 20 personene i gjennomsnitt har betalt 1 £ hver, og billettprisene er som de er. Det må altså i alle fall være minst 12 barn i gruppa. Og, siden det skal være personer fra alle kategorier, kan det maksimalt være 18 barn. Så vi kan innsnevre vårt søk til tilfellene 12, 14, 16 og 18 barn.

12 barn:
Da må de 8 andre personene (voksne og ungdom) ha betalt 14 £, dvs i snitt 1,75 £. Umulig.

14 barn:
Da må de 6 andre personene ha betalt 13 £. Det passer: 1 voksen (3 £) og 5 ungdom (10 £).

16 barn:
Da må de 4 andre personene ha betalt 12 £. Det kunne passet med 4 voksne (4·3 £), men da blir det ingen ungdommer, hvilket vi må ha.

18 barn:
Da må de 2 andre personene ha betalt 11 £, altså umulig.

Konklusjon: Det var 1 voksen, 5 ungdommer og 14 barn på utstillingen.

Oppgave 2 Hvor mange kvadrater kan vi lage på geobrettet?

5×5-geobrett

1 kvadrat av typen 4×4
4 kvadrater av typen 3×3
9 kvadrater av typen 2×2
16 kvadrater av typen 1×1

Totalt 1 + 4 + 9 + 16 = 30 kvadrater.

6×6-geobrett:

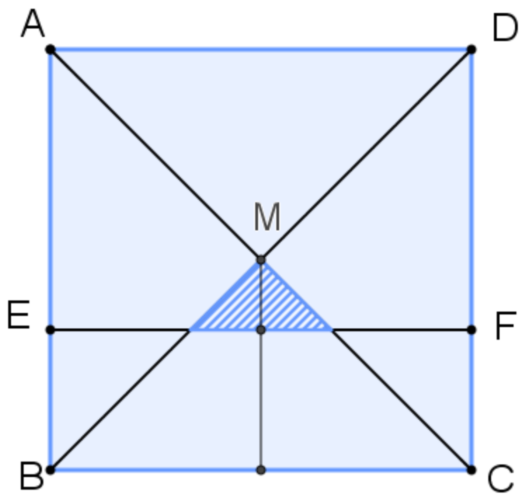
1 kvadrat av typen 5×5
4 kvadrater av typen 4×4
9 kvadrater av typen 3×3
16 kvadrater av typen 2×2
25 kvadrater av typen 1×1

Totalt 1 + 4 + 9 + 16 + 25 = 55 kvadrater.

Vi legger merke til at vi finner antall kvadrater ved å summere kvadrattall til og med én mindre enn «størrelsen» på geobrettet. Generelt, altså på et n×n-geobrett, får vi dermed at antall kvadrater er gitt ved kvadratsummen 1·1 + 2·2 + 3·3 + …… + (n – 1)(n – 1).

(En kan utlede at denne summen kan skrives som $\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$, men det kreves ikke.)

Oppgave 3 Hvor stor brøkdel?



Vi lar M være midtpunktet i kvadratet (der de to diagonalene krysser hverandre), og vi tenker oss en høyde i trekanten BCM nedfelt fra M normalt på BC.

Den skraverte trekanten er *formlik* med ΔBCM, siden begge to trekantene har vinkler på henholdsvis 90°, 45° og 45°.

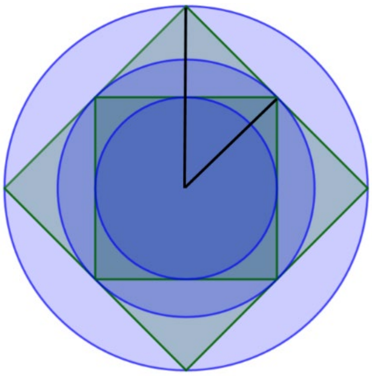
Lengden BE er 1/3 av BA, og må dermed samtidig være 2/3 av høyden i ΔBCM, mens den tilsvarende høyden i den skraverte trekanten må være 1/3 av høyden i ΔBCM.

Lengdeforholdstallet mellom den skraverte trekanten og ΔBCM er altså 1/3, og dermed er arealet av den skraverte trekanten 1/9 av arealet av ΔBCM, som i sin tur har et areal som er 1/4 av arealet av hele kvadratet BCDA.

Det skraverte området utgjør altså $\frac{1}{9} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{36}$ av hele figuren.

(En alternativ løsningsmetode kan være å beregne arealet utenfor det skraverte (f.eks via tre kongruente, likebeinte trekanter og ett trapes) og subtrahere dette fra arealet av hele kvadratet.)

Oppgave 4 Finn forholdet



Radius i en omskrevet sirkel blir hypotenusen i en 45-45-90-trekant der kateten er radius i nabosirkelen innenfor:

Radius i den omskrevne sirkelen blir dermed $\sqrt{2}$ ganger så lang som radius i sirkelen innenfor, og forholdet mellom *arealene* blir dermed: $\frac{\pi(\sqrt{2}r)^2}{\pi r^2} = \frac{\pi \cdot 2 \cdot r^2}{\pi r^2} = 2$

Arealet av en omskrevet sirkel er altså nøyaktig *dobbelt* så stort som arealet av nabosirkelen innenfor seg.

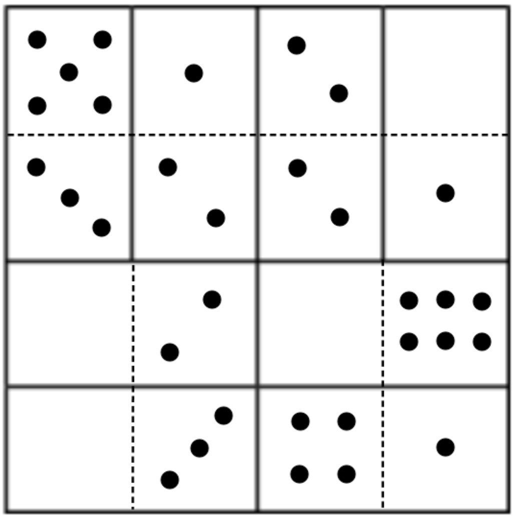
Et artig poeng er forresten da at området *mellom* to nabosirkler har like stort areal som hele sirkelen innenfor seg.

Oppgave 5 Domino

Noen aktuelle betraktninger i arbeidet med å lete etter løsninger, kan f.eks være:

- Brikken med 5+3 øyne, må ha to 0-felter i sin forlengelse (5+3+0+0 = 8)
- Brikken med 6+0 øyne, må ha to felter med sum 2 i sin forlengelse, altså enten 0+2 eller 1+1, i en passende rekkefølge.
- På tvers av 6-tallet (på 6+0-brikken), må vi ha tre felter med sum 2, altså enten 0+0+2 eller 0+1+1, i en passende rekkefølge.
- Brikken med 4+1 øyne, må ha to felter med sum 3 i sin forlengelse, altså enten 0+3 eller 1+2, i en passende rekkefølge.

En (av flere mulige) løsninger vi kan finne, er denne:



Oppgave 6 Finn A, B og C

En kan prøve seg fram til en finner tall som passer, og underveis erfarer en kanskje at det ikke er noen vits i å prøve veldig store tall. Litt arbeidsbesparende kan det være å forsøke å resonnere litt, dessuten kan det være et poeng å sikre seg at en har funnet alle løsningene (om det skulle være flere enn én mulig).

For eksempel:
Siden vi er på jakt etter positive heltall, ser vi f.eks av 1) at $A \cdot B = 72 - C \leq 71$, og samtidig nødvendigvis også $C \leq 71$. Dette begrenser vårt søk etter mulig verdier for A og B en god del.

Vi ser også at dersom ett av tallene er oddetall, må også begge de to andre være det.
(For eksempel: Hvis C er odde, følger det av 1) at $72 - C$ er odde, dvs at produktet $A \cdot B$ er odde. Men det går bare hvis både A og B var odde.) Så enten må alle de tre tallene være partall, eller så må de alle være oddetall. Dette begrenser vårt søk ytterligere.

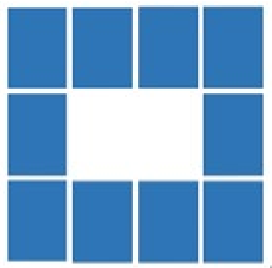
Vi kan eventuelt også arbeide litt algebraisk på likningene, gjerne i kombinasjon med betraktninger rundt primtall. For eksempel: Adderer vi 2) og 3), og faktoriserer venstresiden, får vi at $(A+B)(C+1) = 208$. Og tallet 208 har primfaktoriseringen $208 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 13$, hvilket nå f.eks forteller oss at C+1 (og A+B for den saks skyld) må være enten 2 eller 13 eller en kombinasjon av alle disse primfaktorene til 208. Eneste kandidater for C+1 er dermed 2, 4, 8, 13, 16, 26, 52, 104 og 208 – men siden vi innledningsvis argumenterte for at $C \leq 71$, er 104 og 208 uaktuelle. Kandidater for C er dermed så langt 1, 3, 7, 12, 15, 25 og 51.

Nå er det kanskje så få at det er overkommelig å teste dem ut én etter én, og vi ender til slutt opp med at det kun fins én eneste løsning, nemlig C=12 med tilhørende A=6 og B= 10.

OPPGAVENE FINALE 2019

Oppgave 1 Ramme av kort

Utstyr: 10 vanlige spillkort med verdiene 1-10. (Esset regnes som 1.)

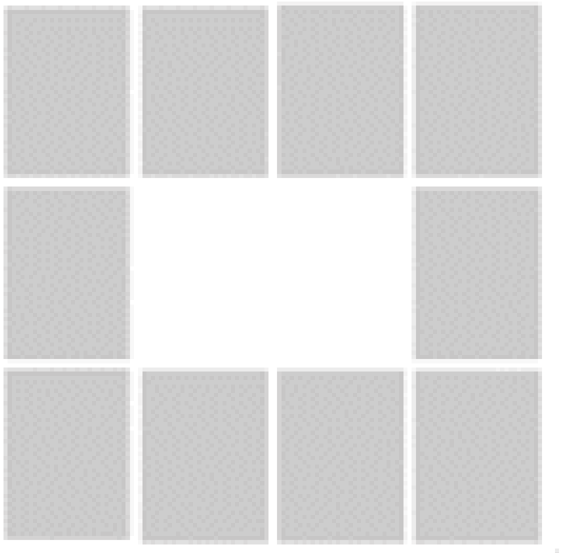


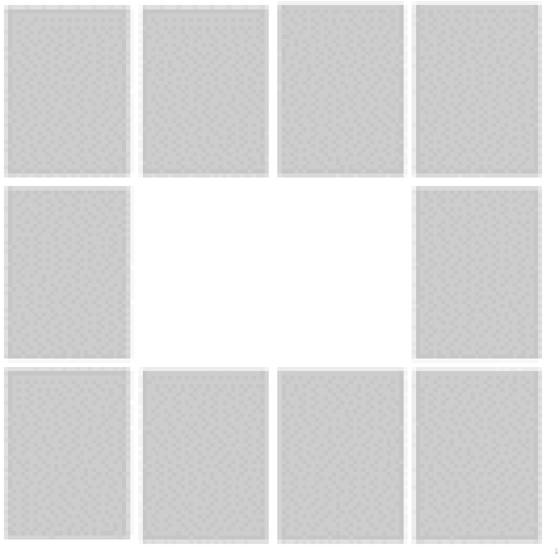
Legg de ti kortene i et rektangel med tre kort på to sider og fire kort på to sider, slik figuren viser.

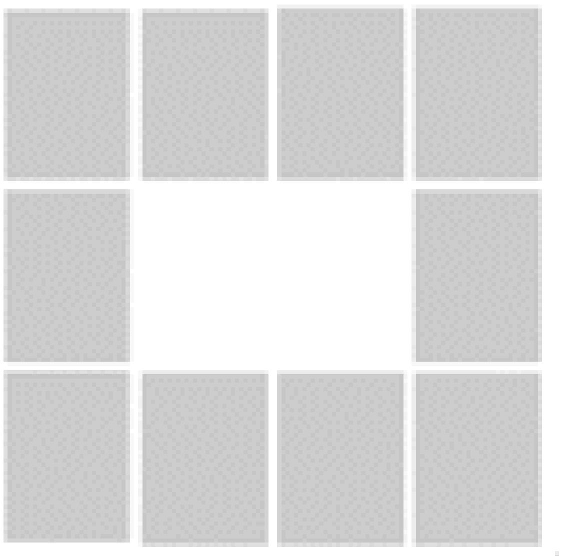
Kortene skal legges slik at summen av kortene langs alle de fire sidene blir like store.

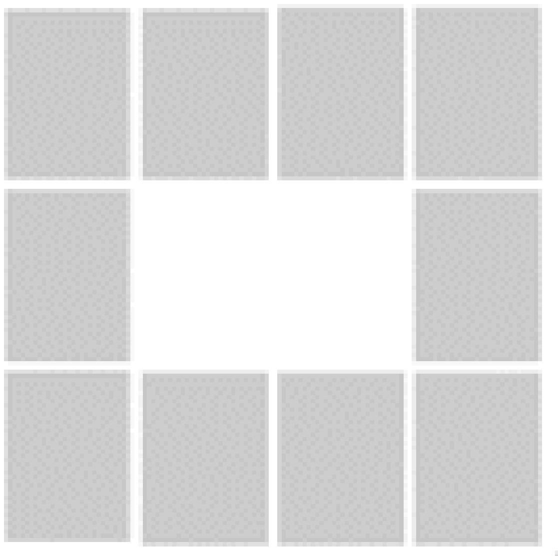
Løsninger skrives inn på svararket.

Arbeidsark Oppgave 1





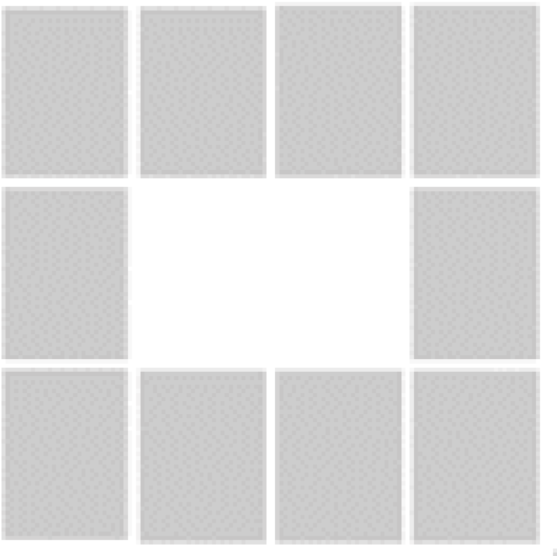


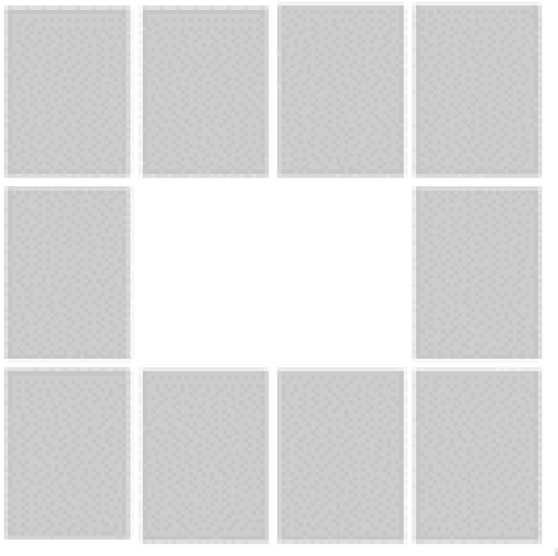


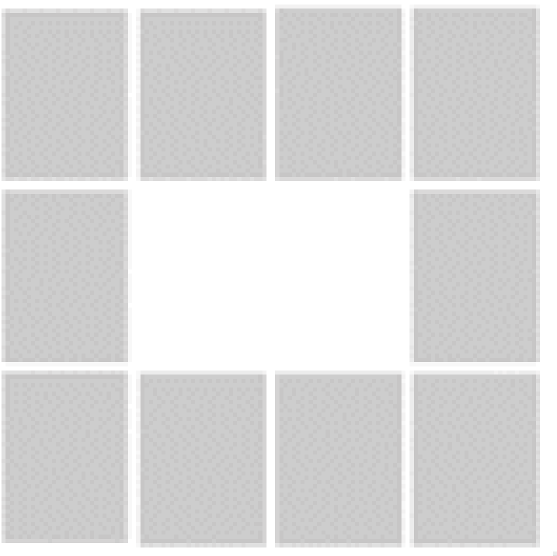
Finale 2019

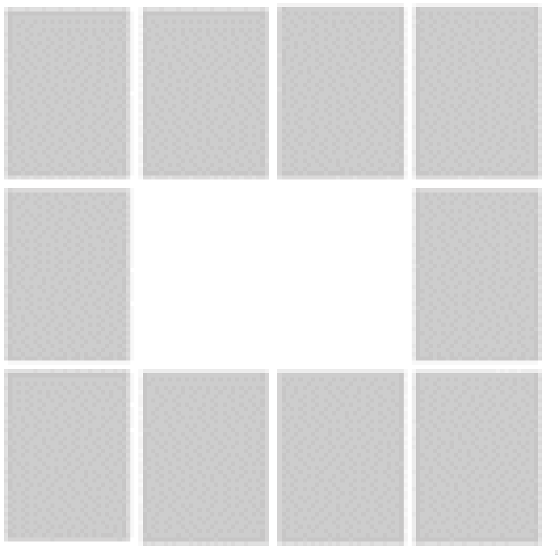
Svarark oppgave 1 Fylke: ______________________

Skriv bare inn tall, kortene skal ikke tegnes.







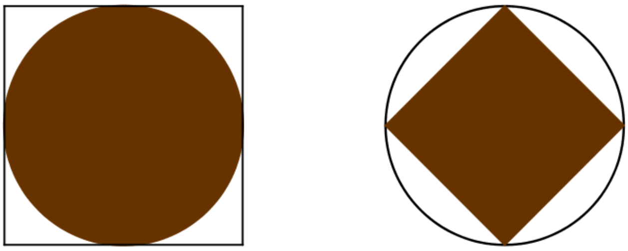


Oppgave 2 Hvilken figur dekker best?

Utstyr: Kalkulator, passer og linjal.

Figurene viser en sirkel innskrevet i et kvadrat og en sirkel omskrevet et kvadrat.

Hvilken figur dekker størst andel av arealet til den omskrevne figuren - er det sirkelen i kvadratet eller kvadratet i sirkelen?



Finale 2019

Svarark oppgave 2

Fylke: ______________________

Oppgave 3 Omkretsen til en trekant

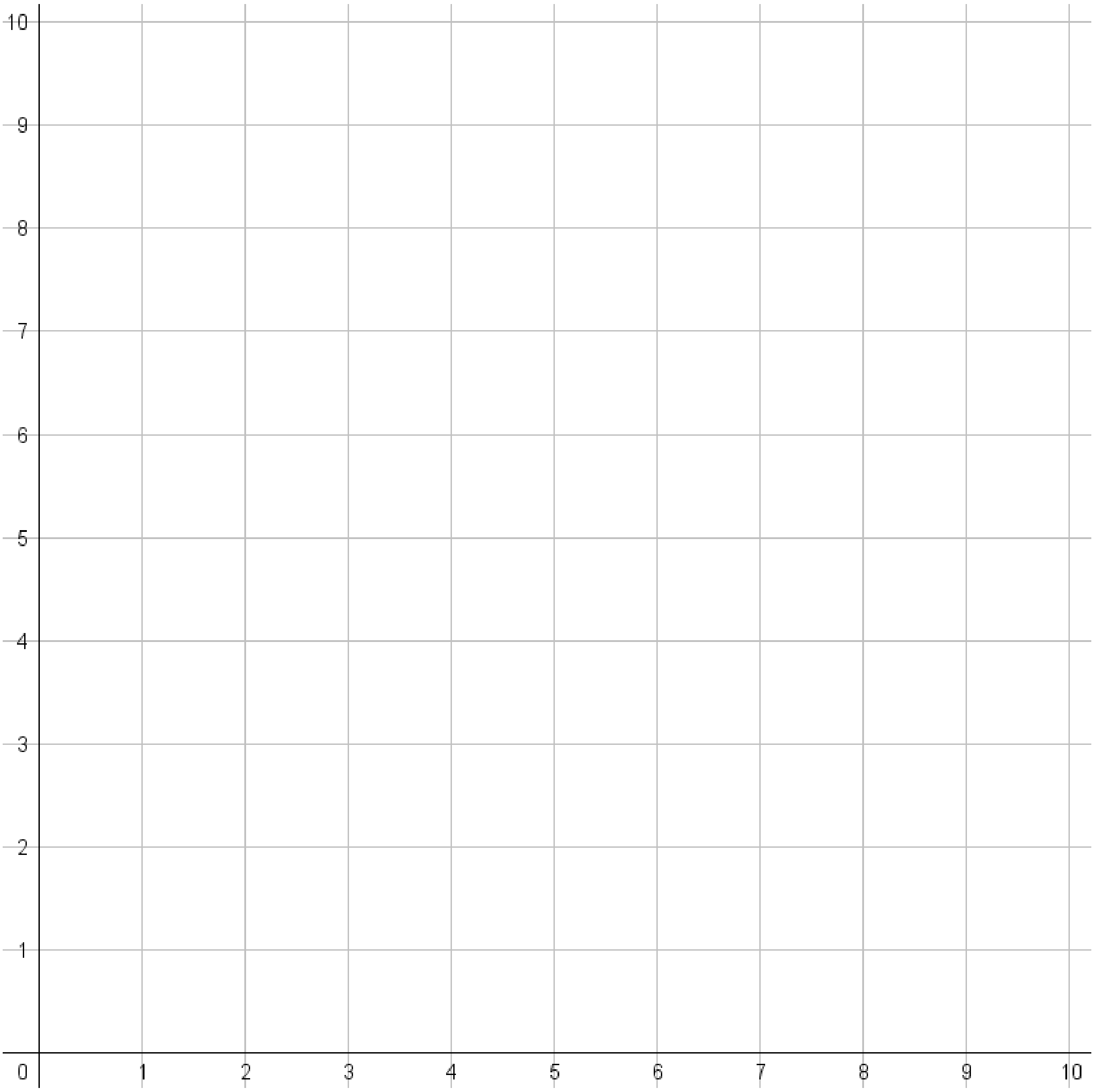
Utstyr: Koordinatsystem med rutenett, 1. kvadrant 10×10. Linjal.

En trekant har ett hjørne på linja $y = x$, ett hjørne på x-aksen og ett hjørne i $(7, 1)$.

Alle hjørnene har heltallskoordinater.

Hva er den *minste omkretsen* trekanten kan ha?

Koordinatsystem til oppgave 3 «Omkretsen av en trekant»



Finale 2019

Svarark oppgave 3

Fylke: ________________________

Oppgave 4 TVERRSUM 51

Hvor mange sekssifrede tall har tverrsum 51?

Finale 2019

Svarark oppgave 4

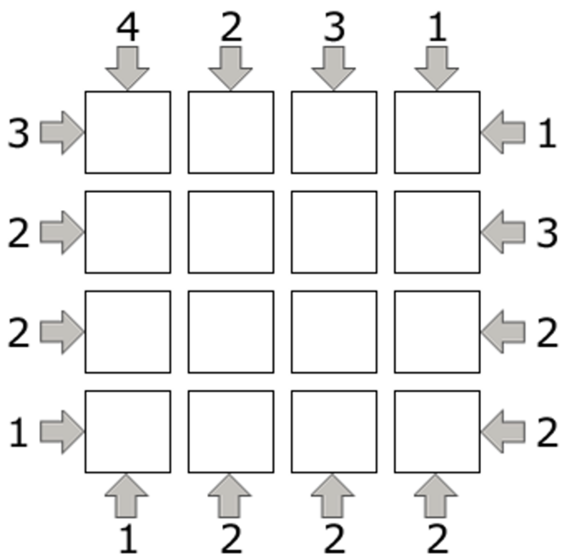
Fylke: ________________________

Oppgave 5 Skyskraperne

Utstyr: Arbeidsark med figuren.

16 skyskrapere er plassert i et kvadratisk rutenett, som vist på figuren.

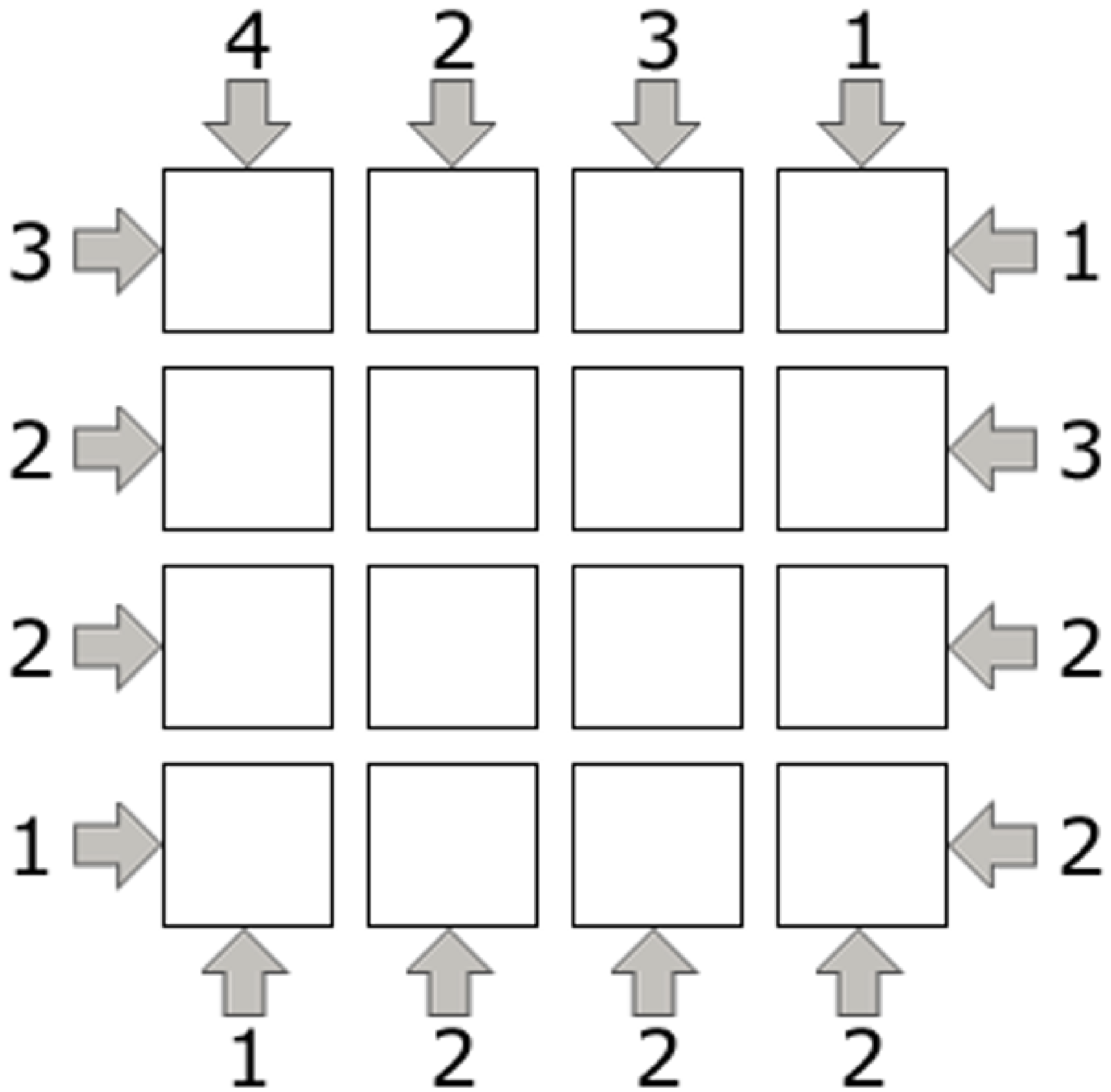
Skyskraperne har høyde 1, 2, 3 eller 4.



Skriv inn høyden til hver skyskraper slik at alle disse kravene blir tilfredsstilt:

- Skyskraperne i hver rad og hver kolonne har forskjellige høyder.
- Tallene rundt kantene viser hvor mange skyskrapere som er synlig i den raden/kolonnen, sett fra den retningen.
- En kan aldri se en kortere skyskraper bak en høyere.

Arbeidsark med figuren til oppgaven «Skyskraperne»



Finale 2019

Svarark oppgave 5 Fylke: ______________________

Skriv inn tall (skyskraperens høyde) i hver rute.

	4	2	3	1	
3					1
2					3
2					2
1					2
	1	2	2	2	

LØSNINGER FINALE 2019

Oppgave 1 Ramme av kort

Her fins det flere mulige løsninger. Og vi kan legge merke til at for hver løsning, fins det speilede og roterte versjoner, som dermed i en viss forstand er «samme» løsning.

Her er noen eksempler:

SUM 18

6	7	1	4
10			9
2	3	8	5

utgangspunkt

2	3	8	5
10			9
6	7	1	4

speilet horisontalt

4	1	7	6
9			10
5	8	3	2

speilet vertikalt

5	8	3	2
9			10
4	1	7	6

rotert 180°

SUM 20

10	5	2	3
6			9
4	1	7	8

utgangspunkt

4	1	7	8
6			9
10	5	2	3

speilet horisontalt

3	2	5	10
9			6
8	7	1	4

speilet vertikalt

8	7	1	4
9			6
3	2	5	10

rotert 180°

SUM 22

6	5	1	10
7			4
9	2	3	8

utgangspunkt

9	2	3	8
7			4
6	5	1	10

speilet horisontalt

10	1	5	6
4			7
8	3	2	9

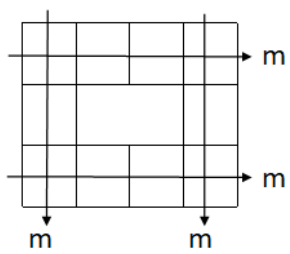
speilet vertikalt

8	3	2	9
4			7
10	1	5	6

rotert 180°

…

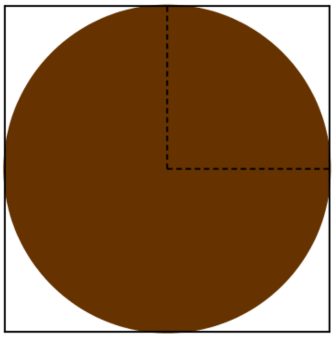
Ved å analysere situasjonen litt nøyere, kan en f.eks finne ut at summen av de fire hjørnetallene nødvendigvis må ha rest 1 ved divisjon med 4:

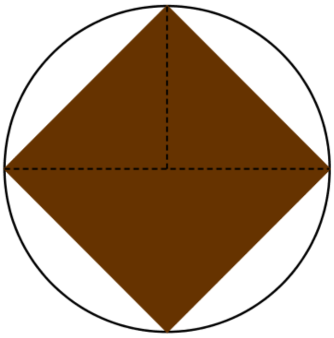


Lar vi m betegne summen langs hver side, og h betegne summen av de fire hjørnetallene, får vi nemlig at 4m = 1+2+3+….+10 + h = 55 + h, fordi hvert av de fire hjørnetallene her blir telt med to ganger.
Da følger det at m = (55+h)/4, som viser at h-1 må være delelig med 4, og dessuten gir oss en artig sammenheng mellom h og m (og som vi kan sjekke at stemmer i løsningene vist ovenfor).

Oppgave 2 Hvilken figur dekker best?

Vi kan anta at sirkelen har radius r=1.
(Andre radier gir formlike versjoner, med de samme arealforholdstall som for r=1.)





Sirkelen har da areal lik π. ($= \pi \cdot 1^2$)

Det omskrevne kvadratet har areal 4.
(Sidekantene er lik sirkelens diameter, altså lik 2.)

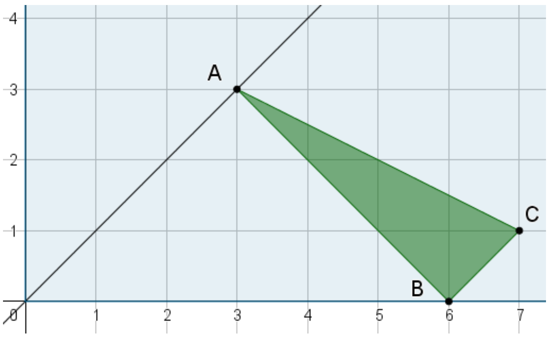
Det innskrevne kvadratet har areal 2.
(F.eks kan vi betrakte det som fire trekanter, hver med areal lik $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2}$.)

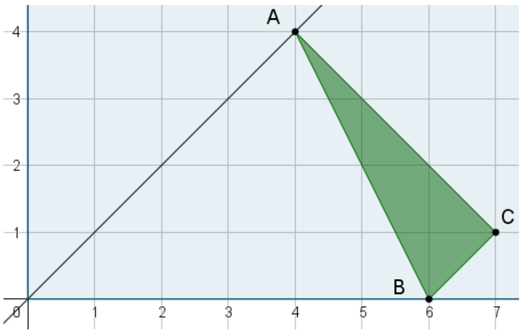
Arealforholdstallene er altså henholdsvis $\pi/4$ ($\approx 0{,}785$) og $2/\pi$ ($\approx 0{,}6366$).

Konklusjonen blir altså at det er *sirkelen i kvadratet* som dekker den største andelen av den omskrevne figuren.

Vi kan merke oss at dersom vi istedenfor betrakter *differansene* mellom ytre og indre areal, får vi henholdsvis $4 - \pi$ og $\pi - 2$ for de to tilfellene, men da gjenstår det fortsatt å dividere med arealet av den omskrevne figuren (henholdsvis 4 og π) før vi kan konkludere angående *forholdene*. Konklusjonen på det opprinnelige spørsmålet blir naturligvis den samme, siden $(4 - \pi)/4 < (\pi - 2)/\pi$.

Oppgave 3 Omkretsen til en trekant





Intuitivt kan vi tenke at det er mest avstandsbesparende om A ligger nærme både B og C samtidig. (For eksempel: Plasserer vi A og B nærmere origo, blir sidene AC og BC unødvendig lange, så det vil fungere dårlig.)

Det beste er om vi lar BC være parallell med linja y=x, dvs at vi lar B = (6, 0), samtidig som ΔABC er likebeint, altså at A ligger på midtnormalen mellom B og C. Men da blir ikke A heltallig, så vi må istedenfor nøye oss med å la A = (3, 3) eller A = (4, 4).

Omkretsen blir i begge disse tilfellene like. De tre sidene i trekanten kan betraktes som hypotenuser i tre forskjellige rettvinklede trekanter, og vi ser at vi får de samme tre trekantene i begge disse tilfellene.

De tre hypotenusene kan vi beregne hver for seg ved hjelp av Pytagoras' setning.
Viser beregningen for det ene tilfellet her:

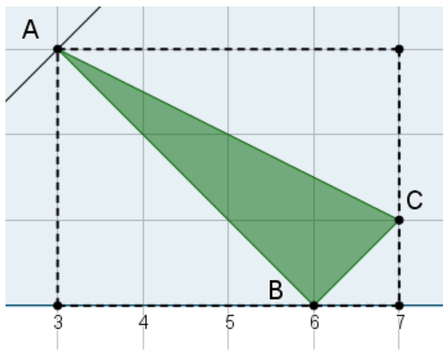
$$AB = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$BC = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$AC = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

Omkrets:

$$AB + BC + AC = 4\sqrt{2} + 2\sqrt{5} \ (\approx 10{,}13)$$



Den minste mulige omkrets er altså ca 10,13, når vi lar B = (6, 0) og A = (3, 3) eller A = (4, 4).

(Å eksperimentere ved hjelp av GeoGebra, kan ellers være en fin aktivitet her.)

Oppgave 4 TVERRSUM 51

Gjennomsnittet av de seks sifrene må være 51/6 = 8,5. Det forteller oss at mange av sifrene i tallet må være 9. Og siden ingen sifre kan være større enn 9, får vi også nokså sterke begrensninger på hvor mange «små» sifre et slikt tall kan ha.

Vi kan f.eks starte med å fylle på med flest mulig 9-ere, og redusere sifrene steg for steg derfra.

Fem 9-ere: Da må vi ha nøyaktig én 6-er, og det gir *seks* slike løsninger.
(999996, 999969, 999699, 996999, 969999 og 699999)

Fire 9-ere: Da må summen av de to andre sifrene være 15, altså én 7-er og én 8-er.
Det gir *tretti* slike løsninger. (= 6·5, fordi vi har 6 mulige posisjoner for 7-er'n kombinert med 5 resterende mulige posisjoner for 8-er'n.)
(999978, 999987, 999798, 999897, 997998, 998997, …. ,798999, 897999, 789999 og 879999)

Tre 9-ere: Da må summen av de tre andre sifrene være 24, altså tre 8-ere.
Det gir *tjue* slike løsninger. (= 6·5·4/6, fordi vi har 6 mulige posisjoner for den første 8-er'n, kombinert med 5 for den neste, kombinert med 4 for den neste – og dessuten vil alle innbyrdes ombytting av de tre 8-er'ne ikke endre tallet, så vi må skalere ned ved å dividere med antall slike ombyttinger, som i hvert tilfelle er 6.)
(999888, 998988, 998898, 998889, 989889, 988989, 988899 , …. , 889899 og 888999)

To 9-ere: Da må summen av de fire andre sifrene være 33, og det går ikke uten at minst ett av disse er en 9-er, og slike muligheter har vi allerede telt opp.

Og færre 9-ere kan vi naturligvis ikke ha, og dermed har vi telt opp alle mulighetene.
Det blir i alt 6+30+20 = **56** muligheter.

Oppgave 5 Skyskraperne

Venstre kolonne må være 1,2,3,4 lest ovenfra, for å få 4-siktetallet til å stemme. Vi må også ha en 4-er i øverste høyre hjørne, for å få de to 1-siktetallene til å stemme.

Videre må vi ha 3 i nederste høyre hjørne, for å få de to 2-siktetallene her til å stemme:

		4	2	3	1		
		⇓	⇓	⇓	⇓		
3	⇒	1			4	⇐	1
2	⇒	2				⇐	3
2	⇒	3				⇐	2
1	⇒	4				⇐	2
		⇑	⇑	⇑	⇑		
		1	2	2	2		

		4	2	3	1		
		⇓	⇓	⇓	⇓		
3	⇒	1	3	2	4	⇐	1
2	⇒	2				⇐	3
2	⇒	3				⇐	2
1	⇒	4			3	⇐	2
		⇑	⇑	⇑	⇑		
		1	2	2	2		

Nederste vannrette rad må nå være 4,2,1,3 for å unngå to 2-ere i nest ytterste, høyre kolonne. Videre utfylling blir nå omtrent som å løse Sudoku, og vi kan til slutt sjekke at løsningen vi har kommet fram til, stemmer med alle de seksten påkrevde siktetallene:

		4	2	3	1		
		⇓	⇓	⇓	⇓		
3	⇒	1	3	2	4	⇐	1
2	⇒	2				⇐	3
2	⇒	3				⇐	2
1	⇒	4	2	1	3	⇐	2
		⇑	⇑	⇑	⇑		
		1	2	2	2		

		4	2	3	1		
		⇓	⇓	⇓	⇓		
3	⇒	1	3	2	4	⇐	1
2	⇒	2	4	3	1	⇐	3
2	⇒	3	1	4	2	⇐	2
1	⇒	4	2	1	3	⇐	2
		⇑	⇑	⇑	⇑		
		1	2	2	2		