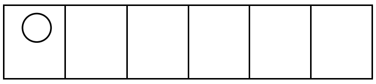
1. Først vil vi se på tilfellet der brettet bare består av én rad:



Spill noen ganger på slike $1 \times n$-brett med forskjellig lengde. Har en av spillerne en vinnerstrategi på alle slike brett? Hva er den strategien?

2. Nå vil vi se på tilfellet der brettet er kvadratisk, altså for eksempel 2×2-brett, 3×3-brett, 4×4-brett, og så videre.

a) Har spiller A en vinnerstrategi på 2×2-brett? Har spiller B en vinnerstrategi? Beskriv en eventuell vinnerstrategi.

b) Har noen av spillerne en vinnerstrategi på 3×3-brett?

c) Bonusspørsmål: Lag en hypotese om hvorvidt noen av spillerne har en vinnerstrategi på alle kvadratiske brett (unntatt 1×1-brett, som er litt kjedelige, siden de bare består av én rute…). Kan dere vise at hypotesen stemmer?

3. En annen mulighet er smale brett som bare består av to rader, som dette 2×6-brettet:

a) Hvem har en vinnerstrategi på 2×3-brett? Hva er vinnerstrategien?

b) Har noen en vinnerstrategi på 2×4-brett? Hva er i så fall vinnerstrategien?

c) Bonusspørsmål: Lag en hypotese om hvorvidt noen av spillerne har en vinnerstrategi på alle slike smale $2 \times n$-brett. Kan dere vise at hypotesen stemmer?

4. Hvis man er flink til å spille Jafs kan man bruke det til å vinne i et annet spill også, som handler om å finne divisorene til et tall: I Divisorspillet er «spillebrettet» et positivt helt tall, for eksempel 12, og de to spillerne velger en divisor i tallet etter tur. Men man kan ikke velge en divisor som er et multiplum av en divisor som er valgt før, så hvis spiller A velger 2, kan ikke spiller B velge 4, 6 eller 12. Den av spillerne som til slutt må velge 1, har tapt. Hvis vi plasserer divisorene til 12 i et rutenett slik som her, kan vi se at det kanskje er en sammenheng mellom dette spillet og Jafs:

3	6	12
1	2	4

a) Spill divisorspillet med 12 som start-tall, og ved å putte divisorene inn i et 2×3-rutenett. Har en av spillerne en vinnerstrategi?

b) Bruk 45 som start-tall. Hvem har en vinnerstrategi nå, og hvordan ser den ut?

c) Hva med 36? Hvordan ser vinnerstrategien ut da?

d) Hva med 100?

e) Hva med 225?

f) Hva med 196?

g) Hva med 24?

h) Kan dere finne et firesifret tall hvor dere vet at spiller A har en vinnerstrategi?

i) I alle disse tilfellene kan vi gjøre om divisorspillet til et tilsvarende Jafs-spill. Hva går galt hvis vi prøver det med 60 som start-tall? Hadde vi kunnet forandre på Jafs-spillet slik at også divisorspillet med 60 som start-tall kunne bli en form for Jafs?

5. Bonusspørsmål: Kan dere vise at en av spillerne har en vinnerstrategi på alle Jafs-brett, uavhengig av brettets størrelse? Hvilken av spillerne er det?

Venner og fremmede. Lærerark

Kompetansemål etter 10.trinn

Eleven skal kunne utforske, eksperimentere med og formulere logiske resonnement ved hjelp av geometriske idear og gjere greie for geometriske forhold som har særleg mykje å seie i teknologi, kunst og arkitektur

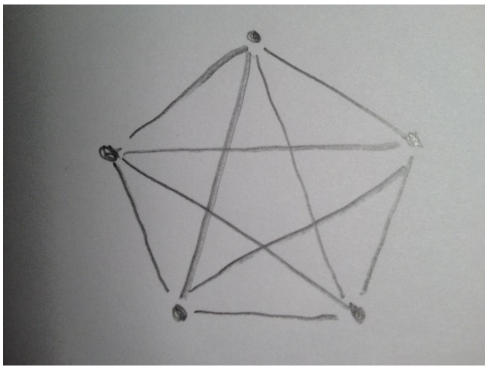
Dette opplegget handler egentlig om det som på engelsk heter «Ramsey Theory», og som man kan lese mer om her:

https://plus.maths.org/content/friends-and-strangers-0

Den artikkelen inneholder svar på oppgave 1, 2 a) og 3.

1. La oss begynne med et lite triangelspill.

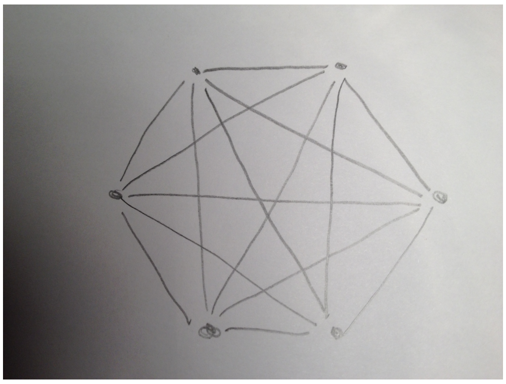
Man er to spillere, Rød og Blå, og fargelegger et linjestykke i denne figuren etter tur:



Spiller Rød begynner med å fargelegge et linjestykke (mellom to av de fem hjørnene) rødt, deretter fargelegger Blå et annet linjestykke blått, og så videre. Den som ender opp med å først fargelegge et helt triangel i sin farge, har tapt. (Bare triangler som har alle sine tre hjørner blant de fem hjørnene i figuren teller med.)

Dersom alle de 10 linjestykkene blir farget uten at noen spiller får et triangel i sin farge, blir spillet uavgjort. Er det mulig at spillet blir uavgjort, eller vil det alltid være en spiller som vinner?

2. Vi kan spille akkurat samme spill på denne større figuren, som har 6 hjørner og 15 linjestykker:



a) Prøv spillet! Etter en stund kan dere kanskje tenke på dette spørmålet: Er det mulig at det blir uavgjort mellom Rød og Blå når man spiller triangelspillet på denne figuren? Kan dere begrunne svaret? Hvis dere står fast kan dere også besvare 2 b) og 3, før dere går tilbake hit.

Dette er en vanskelig oppgave, og det kan være en oppgave i seg selv å skjønne løsningen. Hint: Se på de fem linjestykkene som går ut fra et hjørne. Kan vi si at minst tre av dem må være av samme farge? Hva da med de tre linjestykkene som forbinder de tre hjørnene som er i enden av de tre linjestykkene med samme farge? Hvilke muligheter har vi?

b) For å svare på spørsmål a) kunne det være fristende å prøve alle fargelegginger systematisk, men det er ikke så lett, for det er veldig mange av dem! Kan dere finne ut hvor mange forskjellige måter man kan fargelegge alle de 15 linjestykkene på, slik at hvert linjestykke er enten rødt eller blått?

Løsning: 15 linjestykker gir $2^{15} = 32768$ mulige fargelegginger med to farger.

3. Vi kan se på hjørnene i figurene over som mennesker, og si at et rødt linjestykke mellom dem betyr at de kjenner hverandre («er venner»), mens et blått linjestykke betyr at de ikke kjenner hverandre («er fremmede»). Kan dere formulere hva det vil si for forsamlinger av minst seks mennesker dersom svaret i spørsmål 2 a) er «nei»?

4. Bonusoppgave: Istedenfor å lete etter tre hjørner som er forbundet med hverandre med samme farge, kunne vi lete i større figurer etter fire hjørner som alle er forbundet med hverandre med samme farge, eller etter fem hjørner, og så videre. Hvis vi oversetter til situasjonen med mennesker betyr det at man kan lete i større forsamlinger etter fire personer som alle kjenner hverandre (røde linjestykker), eller etter fire som er fremmede for hverandre (blå linjestykker).

Matematikerne har funnet ut at hvis man samler minst 18 personer, vil det alltid finnes fire av dem som er forbundet med «samme farge», slik at de enten kjenner hverandre alle fire, eller er fremmede for hverandre alle fire. Man har også kommet fram til at hvis man samler nok mennesker vil det alltid være fem stykker som alle er forbundet med samme farge. Men tross iherdige anstrengelser er det ingen som vet nøyaktig hvor mange mennesker som skal til! Vi vet bare at antallet som trengs er minst 43, og kanskje så høyt som 49.

Man kunne forsøke å finne ut om 48 stykker er nok på denne måten: Man kan tegne en figur med 48 hjørner, og med et linjestykke mellom hvert par av hjørner. Så kan man fargelegge linjestykkene i denne figuren røde og blå på alle mulige måter, og se om man alltid fant enten 5 hjørner forbundet med bare blå linjestykker, eller 5 hjørner forbundet med bare røde linjestykker. Men hvor mange forskjellige slike fargelegginger finnes det?

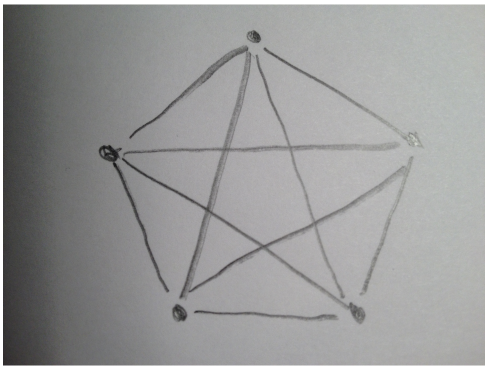
Løsning: Først må vi se hvor mange linjestykker det er i figuren med 48 hjørner. Fra hvert hjørne går det $48 - 1 = 47$ linjestykker, et linjestykke til hvert av de andre hjørnene. Så det er til sammen $48 \cdot 47$ «begynnelser» på linjestykker, men da teller vi hvert linjestykke to ganger – en gang for hvert av de to hjørnene det forbinder. Så til sammen er det $\frac{48 \cdot 47}{2} = 24 \cdot 47 = 1128$ linjestykker, og derfor 2^{1128} mulige fargelegginger.

Venner og fremmede. Elevark

Kompetansemål etter 10.trinn

Eleven skal kunne utforske, eksperimentere med og formulere logiske resonnement ved hjelp av geometriske idear og gjere greie for geometriske forhold som har særleg mykje å seie i teknologi, kunst og arkitektur

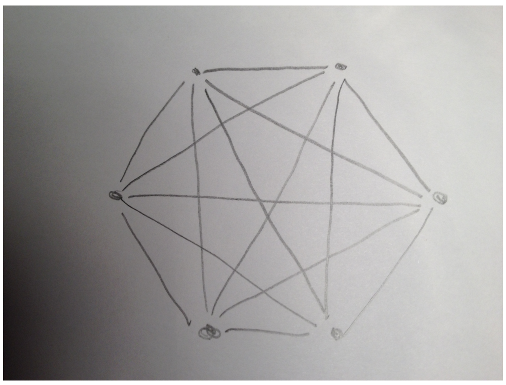
1) La oss begynne med et lite triangelspill. Man er to spillere, Rød og Blå, og fargelegger et linjestykke i denne figuren etter tur:



Spiller Rød begynner med å fargelegge et linjestykke (mellom to av de fem hjørnene) rødt, deretter fargelegger Blå et annet linjestykke blått, og så videre. Den som ender opp med å først fargelegge et helt triangel i sin farge, har tapt. (Bare triangler som har alle sine tre hjørner blant de fem hjørnene i figuren teller med.)

Dersom alle de 10 linjestykkene blir farget uten at noen spiller får et triangel i sin farge, blir spillet uavgjort. Er det mulig at spillet blir uavgjort, eller vil det alltid være en spiller som vinner?

2) Vi kan spille akkurat samme spill på denne større figuren, som har 6 hjørner og 15 linjestykker:



a) Prøv spillet! Etter en stund kan dere kanskje tenke på dette spørsmålet: Er det mulig at det blir uavgjort mellom Rød og Blå når man spiller triangelspillet på denne figuren? Kan dere begrunne svaret? Hvis dere står fast kan dere også besvare 2 b) og 3, før dere går tilbake hit.

b) For å svare på spørsmål a) kunne det være fristende å prøve alle fargelegginger systematisk, men det er ikke så lett, for det er veldig mange av dem! Kan dere finne ut hvor mange forskjellige måter man kan fargelegge alle de 15 linjestykkene på, slik at hvert linjestykke er enten rødt eller blått?

3) Vi kan se på hjørnene i figurene over som mennesker, og si at et rødt linjestykke mellom dem betyr at de kjenner hverandre («er venner»), mens et blått linjestykke betyr at de ikke kjenner hverandre («er fremmede»). Kan dere formulere hva det vil si for forsamlinger av minst seks mennesker dersom svaret i spørsmål 2 a) er «nei»?

4) Bonusoppgave: Istedenfor å lete etter tre hjørner som er forbundet med hverandre med samme farge, kunne vi lete i større figurer etter fire hjørner som alle er forbundet med hverandre med samme farge, eller etter fem hjørner, og så videre. Hvis vi oversetter til situasjonen med mennesker betyr det at man kan lete i større forsamlinger etter fire personer som alle kjenner hverandre (røde linjestykker), eller etter fire som er fremmede for hverandre (blå linjestykker).

Matematikerne har funnet ut at hvis man samler minst 18 personer, vil det alltid finnes fire av dem som er forbundet med «samme farge», slik at de enten kjenner hverandre alle fire, eller er fremmede for hverandre alle fire. Man har også kommet fram til at hvis man samler nok mennesker vil det alltid være fem stykker som alle er forbundet med samme farge. Men tross iherdige anstrengelser er det ingen som vet nøyaktig hvor mange mennesker som skal til! Vi vet bare at antallet som trengs er minst 43, og kanskje så høyt som 49.

Man kunne forsøke å finne ut om 48 stykker er nok på denne måten: Man kan tegne en figur med 48 hjørner, og med et linjestykke mellom hvert par av hjørner. Så kan man fargelegge linjestykkene i denne figuren røde og blå på alle mulige måter, og se om man alltid fant enten 5 hjørner forbundet med bare blå linjestykker, eller 5 hjørner forbundet med bare røde linjestykker. Men hvor mange forskjellige slike fargelegginger finnes det?