Oppgaver runde 1: 8. november – 2. desember 2022

Maksimal tid som kan brukes i elevgruppa/klassen er 90 minutter.

Om flere elevgrupper fra samme skole deltar oppfordrer vi til at konkurransen gjennomføres samtidig for alle gruppene/klassene.

For å oppnå størst mulig deltakelse, kan klassen organiseres i grupper. Hver gruppe prøver å løse alle oppgavene, men de ulike gruppene kan begynne på forskjellige steder i oppgavesettet.

Læreren kan tegne opp et skjema på tavla over alle oppgavene og de ulike gruppene. Da ser en fort hvor svarene eventuelt skiller seg og hvor elevene må bruke noe tid på å diskutere seg frem til et felles svar.

Alle hjelpemidler er tillatt, unntatt Internett og andre verktøy som tillater kommunikasjon.

Totalt kan man få 40 poeng for oppgavesettet, maksimalt 5 poeng per oppgave. Det er ikke nødvendig å skrive begrunnelse på andre oppgaver enn de som ber om det.

Lykke til!

Oppgave 1: Midt mellom to brøker

Hvilken brøk på tallinja ligger nøyaktig midt mellom tallene $\frac{1}{4}$ og $\frac{1}{3}$?

Oppgave 2: To kuber

Sidelengden i en kube K er 20 % kortere enn sidelengden i en annen kube L.

Hvor mange prosent mindre er volumet av K, sammenlignet med volumet av L? (Oppgi svaret med én desimal.)

Oppgave 3: Elever med blå øyne

I en klasse er $\frac{2}{3}$ av elevene gutter.

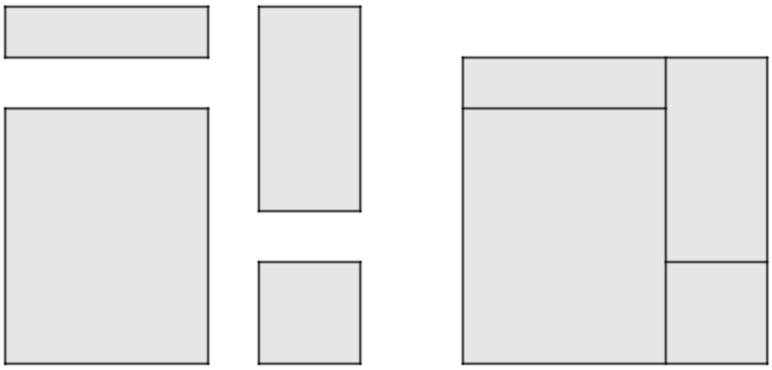
Av jentene i klassen, er det $\frac{1}{3}$ som har blå øyne.

Av guttene i klassen, er det $\frac{1}{8}$ som har blå øyne.

Hvor stor brøkdel av klassen har ikke blå øyne?
Forklar hvordan dere kom fram til løsningen.

Oppgave 4: Tre rektangler og ett kvadrat

Tre rektangler og et lite kvadrat pusles sammen til et større kvadrat, som vist nedenfor:



Summen av omkretsene til de tre rektanglene og det lille kvadratet er 96 cm.

Hvor stort *areal* har det nye kvadratet?

Oppgave 5: Verdien til et uttrykk

La a, b og c stå for tre påfølgende, positive, hele tall, der $a < b < c$ og $k = a^2 + c^2 - 2b^2$.

Hva kan k være?
Begrunn løsningen deres.

Oppgave 6: Sykkelturen

To syklister syklet en strekning med en gjennomsnittshastighet på 30 km/h.
Deretter syklet de samme vei hjem igjen med en gjennomsnittshastighet på 20 km/h.

Hva ble gjennomsnittshastigheten for hele sykkelturen?
Vis utregning.

Oppgave 7: A-format

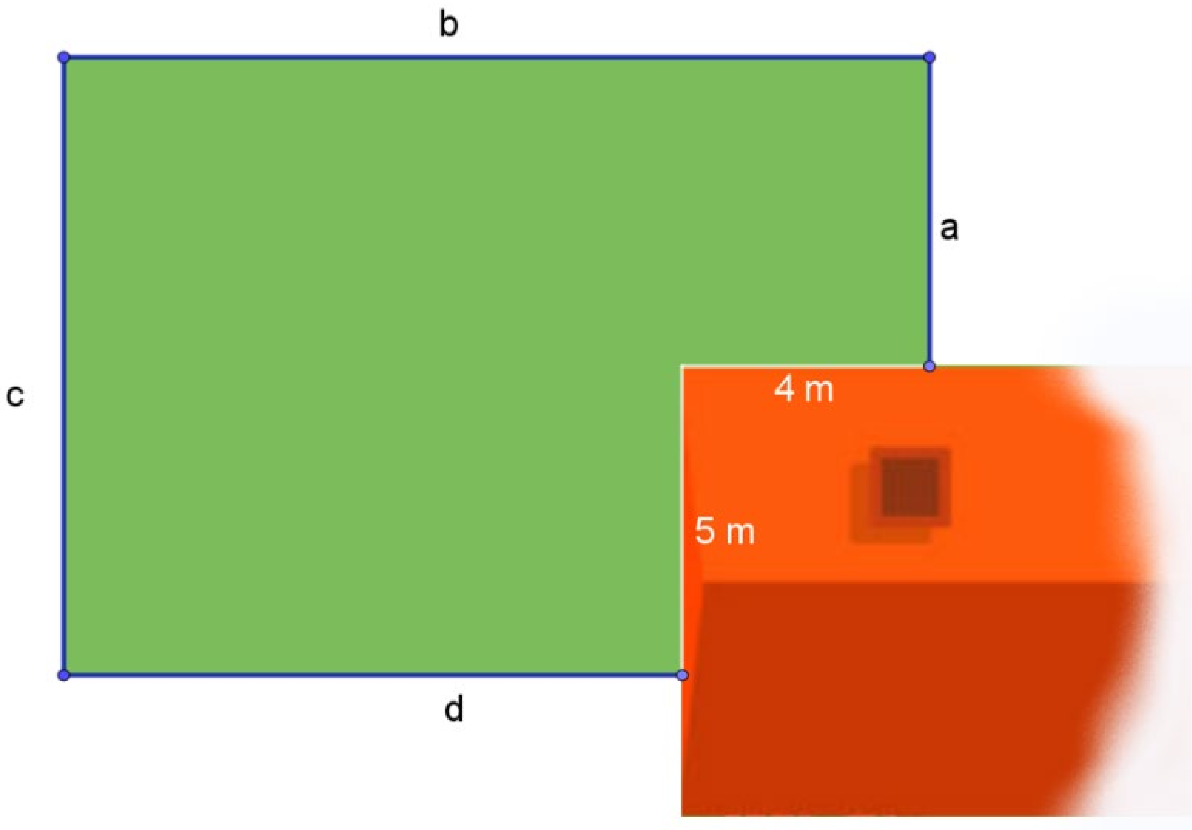
Vanlig kopipapir selges i flere størrelser. De vanligste størrelsene er A4 og A3.
Tabellen nedenfor viser målene på fire ark med ulike A-format:

Størrelse	Lengde (cm)	Bredde (cm)
A4	29,7	21,0
A3	42,0	29,7
A2	59,4	42,0
A1	84,0	59,4

Hvilke mål er det på et ark med størrelse A0?

Oppgave 8: Hundegården

Hansen har 39 meter gjerde, og skal lage en hundegård til hundene sine. Gjerdet blir festet til huset slik figuren viser; vinkelrett på huset, fire og fem meter fra et hushjørne:



Hva er det største mulige arealet av hundegården?

Løsningsforslag oppgaver runde 1

Oppgave 1: Midt mellom to brøker

Tallet $\frac{7}{24}$ ligger midt mellom de to brøkene $\frac{1}{4}$ og $\frac{1}{3}$.

Flere aktuelle løsningsmetoder, for eksempel:

Metode 1
Det aritmetiske gjennomsnittet av to tall, gir tallet midt mellom tallene.

$$\frac{\frac{1}{4}+\frac{1}{3}}{2} = \frac{\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\right)\cdot 12}{2\cdot 12} = \frac{3+4}{24} = \frac{7}{24}$$

Metode 2
Skriver de to brøkene med en «passe stor» felles nevner, og teller oss fram til midten.

$\frac{1}{4} = \frac{1\cdot 6}{4\cdot 6} = \frac{6}{24}$ $\frac{1}{3} = \frac{1\cdot 8}{3\cdot 8} = \frac{8}{24}$ Midt mellom $= \frac{7}{24}$

Oppgave 2: To kuber

Kuben K har 48, 8 % mindre volum enn den store kuben.

Beregninger

Vi kan kalle sidelengdene s og k for den store og den lille kuben. Vi har da at $k = 0{,}8\ s$, og volumet av den lille kuben er dermed

$$k^3 = (0{,}8\ s)^3 = 0{,}8^3 \cdot s^3 \ = 0{,}512\ s^3$$

Volumet til den lille kuben er altså 51,2 % av volumet til den store kuben, og den lille kubens volum er dermed 48,8 % mindre enn volumet til den store.

Oppgave 3: Elever med blå øyne

I klassen er det $\frac{29}{36}$ som ikke har blå øyne.

Beregninger

Andel jenter (av hele klassen) uten blå øyne: $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$

Andel gutter (av hele klassen) uten blå øyne: $\frac{7}{8} \cdot \frac{2}{3} = \frac{14}{24} = \frac{7}{12}$

Andel (av hele klassen) uten blå øyne: $\frac{2}{9} + \frac{7}{12} = \frac{2 \cdot 4}{9 \cdot 4} + \frac{7 \cdot 3}{12 \cdot 3} = \frac{8+21}{36} = \frac{29}{36}$

Oppgave 4: Tre rektangler og ett kvadrat

Arealet av det nye kvadratet er 144 cm^2.

Beregninger

Studerer vi den nye, samlede figuren, ser vi at omkretsen dens er sammensatt av én kortside og én langside fra hver av de opprinnelige bitene A, B, C og D. (For kvadratet D er disse to sidene like.)

Hvis vi dividerer den opprinnelige, totale omkretsen av A, B, C og D på 2, får vi dermed omkretsen av det nye kvadratet, altså 48 (= 96:2) cm.

Sidelengden i dette kvadratet må altså være 48 cm : 4 = 12 cm.

Og dermed blir arealet 12^2 cm^2 = 144 cm^2.

Oppgave 5: Verdien til et uttrykk

Gitt forutsetningene, er verdien til uttrykket lik 2, uansett hvilke verdier a, b og c har.

Beregninger

Siden tallene a, b og c skal være påfølgende naturlige tall, har vi at $b = a+1$ og $c = a+2$.

Det gir:
$k = a^2 + (a+2)^2 - 2(a+1)^2 = a^2 + a^2 + 4a + 4 - 2(a^2 + 2a + 1) = 2a^2 + 4a + 4 - 2a^2 - 4a - 2 = \underline{2}$

For moro skyld, kan vi også regne ut noen konkrete eksempler:

$(a, b, c) = (1, 2, 3)$: $k = 1^2 + 3^2 - 2\cdot 2^2 = 1 + 9 - 8 = 2$

$(a, b, c) = (4, 5, 6)$: $k = 4^2 + 6^2 - 2\cdot 5^2 = 16 + 36 - 50 = 2$

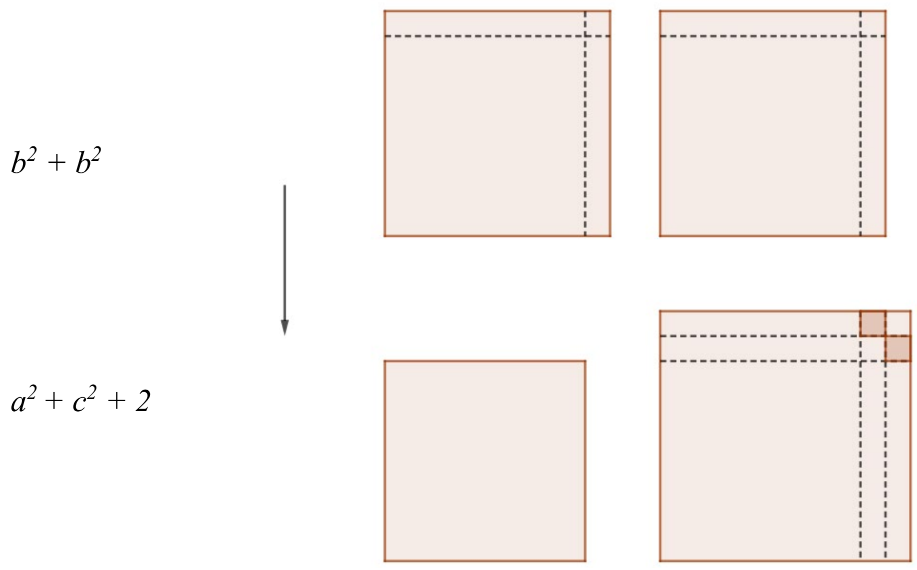
$(a, b, c) = (20, 21, 22)$: $k = 20^2 + 22^2 - 2\cdot 21^2 = 400 + 484 - 882 = 2$

Supplerende, geometrisk resonnement

Ideen er å sammenlikne $2b^2$ med $a^2 + c^2$, jf. skissene nedenfor.

Tar vi to eksemplarer av kvadratet b^2, kan vi splitte opp det ene eksemplaret i et a^2-kvadrat og tre biter (to rektangler og et lite kvadrat). De tre sistnevnte bitene flytter vi over til det andre eksemplaret.

Til det andre eksemplaret mangler vi da nøyaktig to 1×1-kvadrater (hver med areal 1) for å fullføre et helt kvadrat av størrelse c^2, altså er differansen mellom $a^2 + c^2$ og $2b^2$ lik 2.



Oppgave 6: Sykkelturen

Gjennomsnittshastigheten for hele turen er 24 km/h.

Beregninger

Vi kan la *s* stå for strekningen den ene veien, slik at den totale strekningen er *2s*.

På tur ut, bruker de tiden $t_1 = \frac{s}{30}$, og på tur hjem bruker de tiden $t_2 = \frac{s}{20}$

Total tid er altså $t = t_1 + t_2 = \frac{s}{30} + \frac{s}{20} = \frac{s \cdot 2}{30 \cdot 2} + \frac{s \cdot 3}{20 \cdot 3} = \frac{2s+3s}{60} = \frac{5s}{60} = \frac{s}{12} = \frac{2s}{24}$

Siden den totale strekningen er 2s, ser vi nå at gjennomsnittshastigheten er 24 $\left(= \frac{2s}{t}\right)$.

Oppgave 7: A-format

Størrelse	Lengde (cm)	Bredde (cm)
A4	29,7	21,0
A3	42,0	29,7
A2	59,4	42,0
A1	84,0	59,4

A0 har lengde omtrent lik 118,8 cm (= 2 · 59,4 cm) og bredde omtrent lik 84,0 cm.

Resonnement

Vi ser i tabellen at lengden til A(n) er lik det dobbelte av bredden til A(n+1) (oransje piler) mens bredden til A(n) er lik lengden til A(n+1) (blå piler). Hvorfor det må bli sånn, innser vi kanskje ved å plassere to stående A4-ark ved siden av hverandre, og observere at vi da får et liggende A3-ark:

Det kan være interessant å merke seg at arealet til A0 blir ca 9980 cm^2, altså litt i underkant av 1 m^2. Dette er ingen tilfeldighet, for egentlig er A0 definert nettopp slik at arealet skal være eksakt 1 m^2. (Eksakt er langsiden i et A-ark nøyaktig $\sqrt{2}$ ganger så lang som kortsiden.)

Oppgave 8: Hundegården

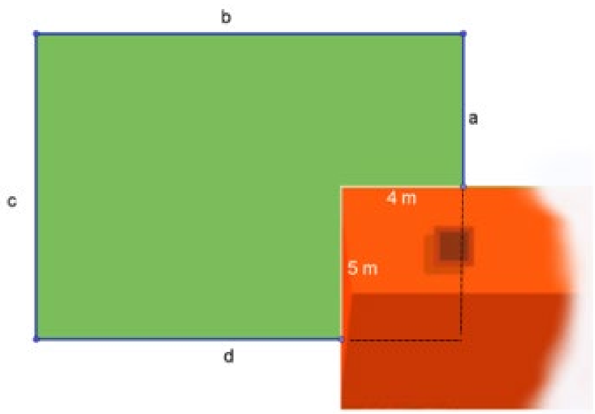
Det største mulige arealet er 124 m^2.

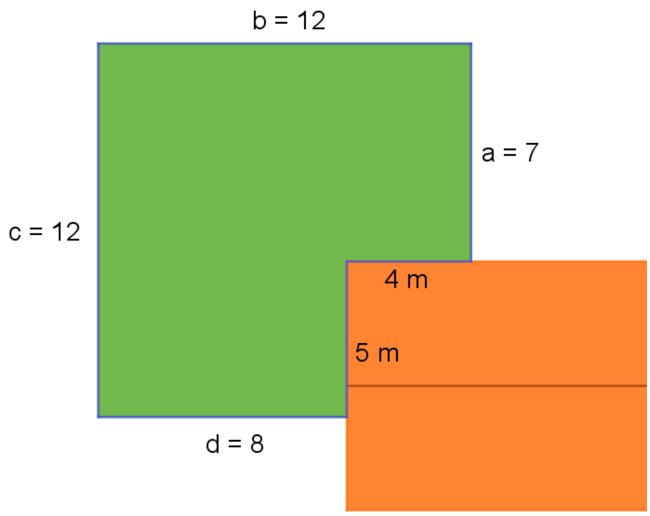
Beregninger

Vi kan ta utgangspunkt i at av alle firkanter med en *gitt* omkrets, vil et kvadrat «utnytte omkretsen best», i betydningen «gi størst areal». At vi egentlig mister et «hjørne» med areal 20 m^2 (= 4·5 m^2) spiller ingen rolle i så måte, vi må bare huske på å trekke fra dette arealet når vi skal beregne arealet av (den sekskantede) hundegården.

Vi kan altså anta at $b = c = a + 5 = d + 4$, og gjerdelengden er dermed lik $4b - (4 + 5) = 4b - 9$.
Det gir $4b - 9 = 39$ og dermed $4b = 48$, altså $b = 12$.

Arealet av hundegården er da $12^2 - 45 = 144 - 20 = 124$.





Oppgaver runde 2: 3. januar – 27. januar 2023

Maksimal tid som kan brukes i elevgruppa/klassen er 90 minutter.

Om flere elevgrupper fra samme skole deltar oppfordrer vi til at konkurransen gjennomføres samtidig for alle gruppene/klassene.

For å oppnå størst mulig deltakelse, kan klassen organiseres i grupper. Hver gruppe prøver å løse alle oppgavene, men de ulike gruppene kan begynne på forskjellige steder i oppgavesettet.

Læreren kan tegne opp et skjema på tavla over alle oppgavene og de ulike gruppene. Da ser en fort hvor svarene eventuelt skiller seg og hvor elevene må bruke noe tid på å diskutere seg frem til et felles svar.

Alle hjelpemidler er tillatt, unntatt Internett og andre verktøy som tillater kommunikasjon.

Totalt kan man få 40 poeng for oppgavesettet, maksimalt 5 poeng per oppgave. Det er ikke nødvendig å skrive begrunnelse på andre oppgaver enn de som ber om det. Det er ikke mulig å laste opp bilder/illustrasjoner, så begrunnelser må gjøres skriftlig.

Lykke til!

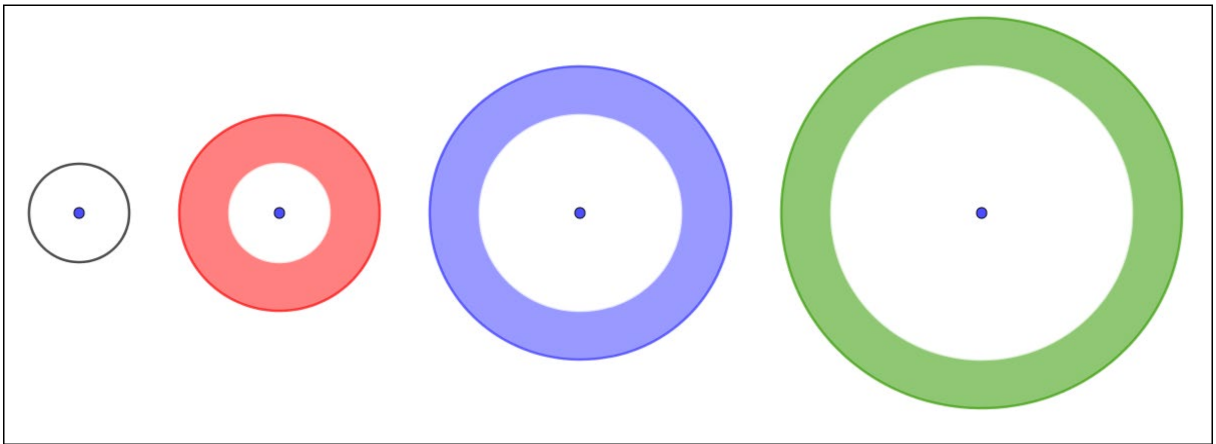
Oppgave 1: Julekuler

Lise skal pakke røde, grønne og gule kuler i esker med 24 kuler.
I en eske med julekuler er to tredeler av kulene røde og en firedel grønne.
Hvor mange gule kuler er det i esken?

Oppgave 2: Konsentriske sirkler

Konsentriske sirkler er sirkler med samme sentrum, men forskjellige radier.
I denne oppgaven studerer vi konsentriske sirkler der radiene er henholdsvis 1, 2, 3, 4,… altså de naturlige tallene.

Vi kan tenke oss at hver større sirkel dannes ved at en sirkelring blir lagt til den foregående sirkelen. På den måten øker det totale arealet.
Skissen nedenfor illustrerer dette. Ved å legge det rosa området til sirkelen med radius 1, får vi en sirkel med radius 2. Ved å legge det lilla området til sirkelen med radius 2, får vi en sirkel med radius 3. Tilsvarende for det grønne området, og så videre.



Radius = 1	Radius = 2	Radius = 3	Radius = 4

Finn radius til den minste sirkelen som har et areal minst tre ganger så stort som sirkelringen som legges til for å danne neste sirkel. Forklar hvordan dere løste oppgaven.

Oppgave 3: Aldersforskjell

Anna er 54 år. Moren hennes er 80 år.
For en del år siden, var Annas alder nøyaktig en tredjedel av morens alder.

Hvor mange år er det siden?

Oppgave 4: Dominobrikker

Et dominospill inneholder 28 todelte brikker, alle forskjellige.
På hver halvdel av en brikke er det enten 0, 1, 2, 3, 4, 5 eller 6 prikker.

Merk: Vi skiller ikke mellom «høyre» og «venstre» side, for eksempel ville en brikke med 1+4 prikker bli oppfattet som samme brikke som en med 4+1 prikker.

Vi ønsker å finne antall av ulike typer brikker.

a) Antall brikker med dobbelt sekser.
b) Antall brikker med like mange prikker på begge halvdeler.
c) Antall brikker med minst én sekser.
d) Antall brikker som har totalt seks prikker.
e) Antall brikker som har et odde antall prikker totalt.

Oppgave 5: Velkomstdrikk

Oskar skal lage en velkomstdrikk til 50 personer.
På nettet finner han denne oppskriften for 4 personer:

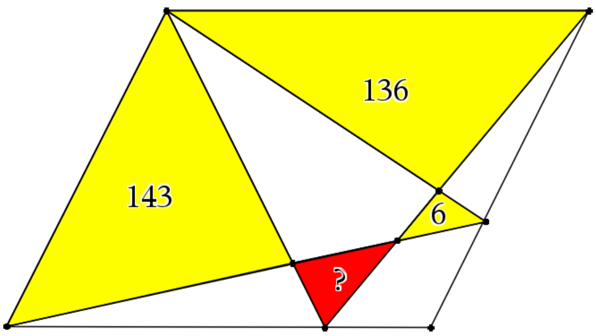
- 200 g jordbær
- 0,9 l mangojuice
- 0,7 l fanta

Hvor mye trenger Oskar av hver ingrediens?

Oppgave 6: Parallellogram

Innenfor parallellogrammet i figuren er de gule områdene markert med sine areal (f.eks. i cm^2).

Bestem arealet til det røde området.



Oppgave 7: Uttrykk som vokser i verdi

For tre påfølgende naturlige tall, undersøker vi differansen mellom summen av det største og det minste tallets kubikk og det dobbelte av det mellomste tallets kubikk.

EKSEMPLER
For tallene 3, 4 og 5 får vi: $5^3 + 3^3 - 2 \cdot 4^3 = 125 + 27 - 128 = 24$
For tallene 6, 7 og 8 får vi: $8^3 + 6^3 - 2 \cdot 7^3 = 512 + 216 - 686 = 42$

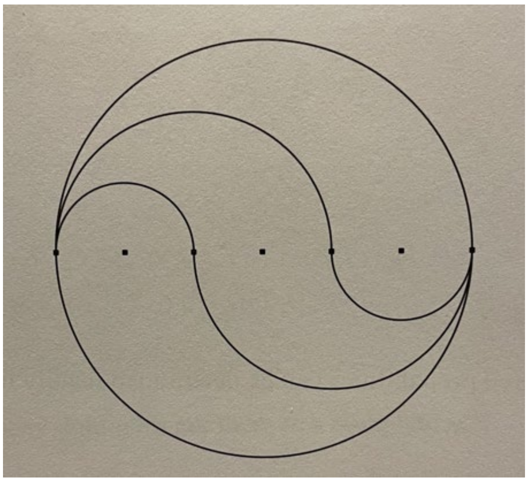
a) Bestem et uttrykk som viser differansen.
b) Begrunn hvorfor differansen alltid blir større og større hvis vi velger stadig større tall.

Oppgave 8: Seks halvsirkler

En sirkel er delt inn i tre områder ved hjelp av halvsirkelbuer i forskjellige størrelser, slik figuren viser:

Radius i sirkelen er 3.

Finn arealene til hver av de tre delene.
Vis hvordan dere kom fram til løsningen.



Løsningsforslag oppgaver runde 2

Oppgave 1: Julekuler

Det er to gule kuler i esken.

Beregninger

Antall røde kuler = $\frac{2}{3} \cdot 24 = \frac{48}{3} = 16$

Antall grønne kuler = $\frac{1}{4} \cdot 24 = \frac{24}{4} = 6$

Antall gule kuler = 24 – 16 – 6 = 2

Oppgave 2: Konsentriske sirkler

Radius =7

Beregninger

$$\frac{areal\ sirkel\ \ r = 4}{areal\ sirkelring\ \ r = 5} = \frac{4 * 4\pi}{5 * 5\pi - 4 * 4\pi} = \frac{16}{9} < 3$$

$$\frac{areal\ sirkel\ r = 5}{areal\ sirkelring\ r = 6} = \frac{5 * 5\pi}{6 * 6\pi - 5 * 5\pi} = \frac{25}{11} < 3$$

$$\frac{areal\ sirkelring\ r = 6}{areal\ sirkelring\ r = 7} = \frac{6 * 6\pi}{7 * 7\pi - 6 * 6\pi} = \frac{36}{13} < 3$$

$$\frac{\boldsymbol{areal\ sirkel\ r = 7}}{areal\ sirkelring\ r = 8} = \frac{7 * 7\pi}{8 * 8\pi - 7 * 7\pi} = \frac{49}{15} > 3$$

Oppgave 3: Aldersforskjell

Det er 41 år siden Karin var tre ganger så gammel som Anna.

Beregninger

Vi kan f.eks la n stå for det antallet år vi er på jakt etter.
Aldersopplysningene gir da likningen $(54 - n) \cdot 3 = 80 - n$, som vi løser og får $n = 41$.

Oppgave 4: Dominobrikker

a) 1
b) 7
c) 7
d) 4
e) 12

Beregninger

a) 6-6
b) 0-0, 1-1, 2-2, 3-3, 4-4, 5-5 og 6-6
c) 0-6, 1-6, 2-6, 3-6, 4-6, 5-6 og 6-6
d) 0-6, 1-5, 2-4, 3-3
e) 0-1, 0-3, 0-5, 1-2, 1-4, 1-6, 2-3, 2-5, 3-4, 3-6, 4-5 og 5-6)

Oppgave 5: Velkomstdrikk

Oskar trenger 2,5 kg jordbær, 11,25 liter mangojuice og 8,75 liter fanta.

Beregninger

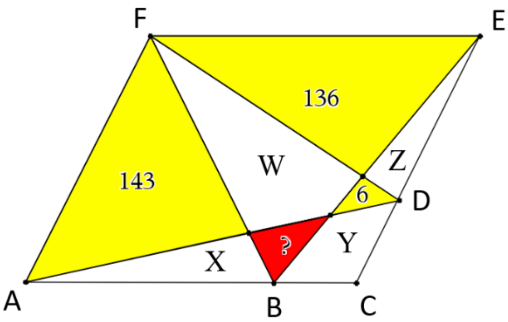
Siden oppskriften passer til 4 personer, og han skal lage til 50, må alle størrelser multipliseres med 50/4 (= 12,5).

200 g · 12,5 = 2500 g = 2,5 kg (jordbær).

0,9 liter · 12,5 = 11,25 liter (mangojuice).

0,7 liter · 12,5 = 8,75 liter (fanta).

Oppgave 6: Parallellogram



Det røde området har areal 13.

Beregninger

Arealet av parallellogrammet er lik grunnlinje * høyde for hver av de to største trekantene. De har en grunnlinje som dekker de to ulike sidekantene i parallellogrammet.

Da må summen av de to største trekantenes areal være lik arealet av hele parallellogrammet.
Da får vi trekant 1 = 143+w +6 og trekant 2 = 136 +w +?.
Disse to må være like:
143 +w+6=136+w+?
? =13

Oppgave 7: Uttrykk som vokser i verdi

Hvis vi kaller det midterste av de tre tallene for n, blir den aktuelle differansen lik 6n.
For større og større n-verdier, blir verdien til 6n større og større.

Beregninger
Med n som det midterste tallet, vil de tre tallene være henholdsvis $n - 1$, n og $n + 1$.

Summen av de to «ytterste» kubikkene:

$$(n + 1)^3 + (n - 1)^3 = (n + 1)(n + 1)(n + 1) + (n - 1)(n - 1)(n - 1) =$$
$$= (n^3 + 3n^2 + 3n + 1) + (n^3 - 3n^2 + 3n - 1) = 2n^3 + 6n$$

Det dobbelte av den midterste kubikken: $2 \cdot n^3 = 2n^3$

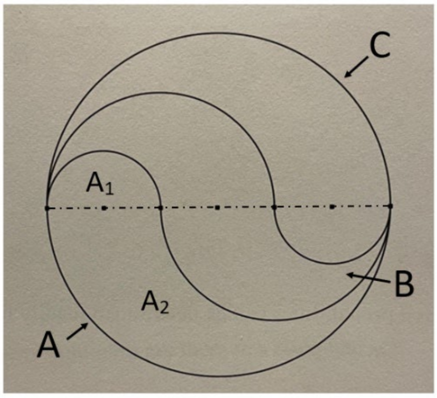
Differansen $= (2n^3 + 6n) - 2n^3 = 6n$

MERK: Dersom vi heller lar n være det minste tallet, får vi uttrykket $6n + 6$ istedenfor.
Og lar vi heller n være det største tallet, får vi uttrykket $6n - 6$ istedenfor.

Oppgave 8: Seks halvsirkler

Arealene til de tre delene, her kalt A, B og C, viser seg å være like store, og hver av disse utgjør dermed 1/3 av arealet til hele sirkelen.

Beregninger



Området A består av en halvsirkel (A_1) med radius 1 og et område (A_2) som er differansen mellom en halvsirkel med radius 3 og en halvsirkel med radius 2.

Altså:
Areal (A) = $\frac{1}{2}\pi\, 1^2 + (\frac{1}{2}\pi\, 3^2 - \frac{1}{2}\pi\, 2^2) = 5\pi - 2\pi = 3\pi$

Område C er kongruent med område A, og arealet til B er gitt ved differansen mellom hele sirkelarealet og det samlede arealet til områdene A og C.

Det gir:
Areal (C) = areal (A) = 3π
Areal (B) = Hele sirkelarealet – Areal (A) – Areal (C) = $\pi\, 3^2 - 3\pi - 3\pi = 9\pi - 6\pi = 3\pi$