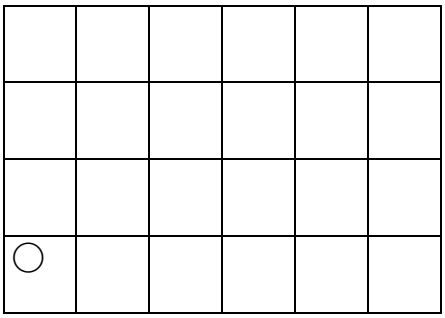
Jafs – et sjokoladespill. Lærerark

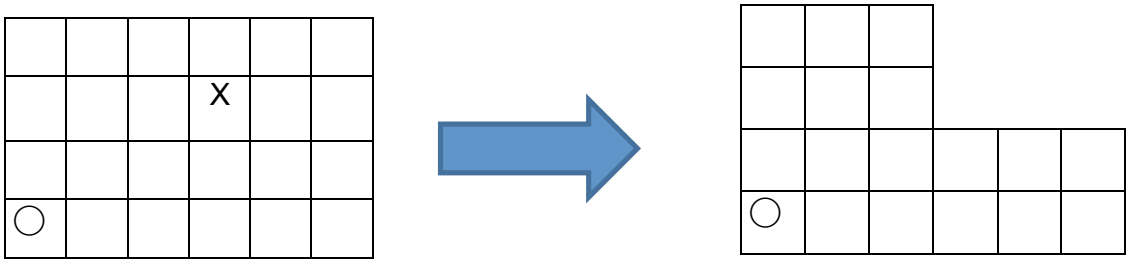
Kompetansemål etter 10. trinn

Eleven skal kunne bruke faktorar, potensar, kvadratrøter og primtal i berekningar

Jafs (på engelsk: «chomp») er et spill for to personer. Spillet starter med en rektangelformet sjokoladeplate inndelt i ruter, og den som til slutt spiser ruten nederst til venstre må betale for sjokoladen:



Spillerne fjerner sjokoladebiter etter tur. Et trekk består av å fjerne en rute, og alle ruter som er til høyre for og over denne, slik at hvis man velger ruten med kryss i blir dette resultatet:

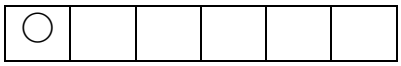


Strengt tatt tar man altså bort alle ruter som ikke er enten til venstre for eller under ruten man valgte. Neste spiller har da færre ruter å velge mellom, og den som til sist må ta ruten nederst til venstre har tapt.
Bruk litt tid til å bli kjent med spillet. Tegn spillebrett (sjokoladeplater) av forskjellige størrelser, og spill to og to.

Vi vil si at en spiller har en vinnerstrategi dersom spilleren kan sørge for å vinne spillet, uavhengig av hva motspilleren velger å gjøre.

Man kan finne mye informasjon om Jafs («chomp») på disse nettsidene, inkludert svarene på oppgave 2, 3 og 5 under:
https://plus.maths.org/content/mathematical-mysteries-chomp
https://plus.maths.org/content/os/issue14/xfile/solutions

1. Først vil vi se på tilfellet der brettet bare består av én rad:



Spill noen ganger på slike $1\times n$-brett med forskjellig lengde. Har en av spillerne en vinnerstrategi på alle slike brett? Hva er den strategien?

Løsning: Spiller A kan vinne ved å ta ruten rett til høyre for ruten lengst til venstre.

2. Nå vil vi se på tilfellet der brettet er kvadratisk, altså for eksempel 2×2-brett, 3×3-brett, 4×4-brett, og så videre.

a) Har spiller A en vinnerstrategi på 2×2-brett? Har spiller B en vinnerstrategi? Beskriv en eventuell vinnerstrategi.

b) Har noen av spillerne en vinnerstrategi på 3×3-brett?

c) Bonusspørsmål: Lag en hypotese om hvorvidt noen av spillerne har en vinnerstrategi på alle kvadratiske brett (unntatt 1×1-brett, som er litt kjedelige, siden de bare består av én rute…). Kan dere vise at hypotesen stemmer?

3. En annen mulighet er smale brett som bare består av to rader, som dette 2×6-brettet:

a) Hvem har en vinnerstrategi på 2×3-brett? Hva er vinnerstrategien?

b) Har noen en vinnerstrategi på 2×4-brett? Hva er i så fall vinnerstrategien?

c) Bonusspørsmål: Lag en hypotese om hvorvidt noen av spillerne har en vinnerstrategi på alle slike smale $2\times n$-brett. Kan dere vise at hypotesen stemmer?

4. Hvis man er flink til å spille Jafs kan man bruke det til å vinne i et annet spill også, som handler om å finne divisorene til et tall: I Divisorspillet er «spillebrettet» et positivt helt tall, for eksempel 12, og de to spillerne velger en divisor i tallet etter tur. Men man kan ikke velge en divisor som er et multiplum av en divisor som er valgt før, så hvis spiller A velger 2, kan ikke spiller B velge 4, 6 eller 12. Den av spillerne som

til slutt må velge 1, har tapt. Hvis vi plasserer divisorene til 12 i et rutenett slik som her, kan vi se at det kanskje er en sammenheng mellom dette spillet og Jafs:

3	6	12
1	2	4

a) Spill divisorspillet med 12 som start-tall, og ved å putte divisorene inn i et 2×3-rutenett. Har en av spillerne en vinnerstrategi?

b) Bruk 45 som start-tall. Hvem har en vinnerstrategi nå, og hvordan ser den ut?

c)Hva med 36? Hvordan ser vinnerstrategien ut da?

d)Hva med 100?

e)Hva med 225?

f)Hva med 196?

g)Hva med 24?

h)Kan dere finne et firesifret tall hvor dere vet at spiller A har en vinnerstrategi?

i)I alle disse tilfellene kan vi gjøre om divisorspillet til et tilsvarende Jafs-spill. Hva går galt hvis vi prøver det med 60 som start-tall? Hadde vi kunnet forandre på Jafs-spillet slik at også divisorspillet med 60 som start-tall kunne bli en form for Jafs?

Løsning: Dersom et positivt heltall har nøyaktig to forskjellige primtallsfaktorer p og q, som forekommer $m-1$ og $n-1$ ganger, kan faktorene settes inn i et $m\times n$-rutenett, slik som vi her gjør for $36=2^2\cdot3^2$:

$2^0\cdot3^2$	$2^1\cdot3^2$	$2^2\cdot3^2$
$2^0\cdot3^1$	$2^1\cdot3^1$	$2^2\cdot3^1$
$2^0\cdot3^0$	$2^1\cdot3^0$	$2^2\cdot3^0$

Å ta vekk de divisorene som er multipler av en gitt divisor betyr da nettopp å ta vekk de rutene som blir borte dersom man i Jafs valgte den ruten der den gitte divisoren står. Alle tallene i a)-g) har nøyaktig to forskjellige primtallsfaktorer, og strategien i divisorspillet er da bare avhengig av hvor ofte de forekommer, og strategien i det tilsvarende Jafs-spillet. Tallet $60=2^2\cdot3^1\cdot5^1$ har derimot tre forskjellige primtallsfaktorer, og et Jafs-spill som skulle tilsvare divisorspillet på 60 ville måtte ha et brett som var en tredimensjonal $3\times2\times2$-boks, ikke noe todimensjonalt rutenett.

5. Bonusspørsmål: Kan dere vise at en av spillerne har en vinnerstrategi på alle Jafs-brett, uavhengig av brettets størrelse? Hvilken av spillerne er det?

Hint: Anta at spiller B har en vinnerstrategi. Det inkluderer at spiller B har et trekk som sikrer at hun vinner dersom spiller A velger ruten øverst til høyre. Hva om spiller A visste hva dette mottrekket var?

Ekstra opplysninger: Beviset i oppgave 5 for at spiller A har en vinnerstrategi gir ikke noe hint om hvordan denne strategien ser ut, og for større brett er det faktisk ukjent hvordan man skal gå frem for å vinne! Datamaskiner kan regne ut strategier for ikke altfor store brett, og i 2002 analyserte en amerikansk high school-elev strategier for $3\times n$-brett. Det ga ham et stipend på 100000 dollar, men en generell vinnerstrategi er fremdeles ikke kjent.

Man kan spille mot en datamaskin på internett (på et 4×7-brett), og siden man starter burde man alltid kunne vinne – i teorien…:

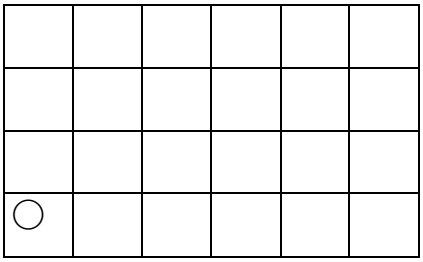
http://www.math.ucla.edu/~tom/Games/chomp.html

Jafs – et sjokoladespill. Elevark

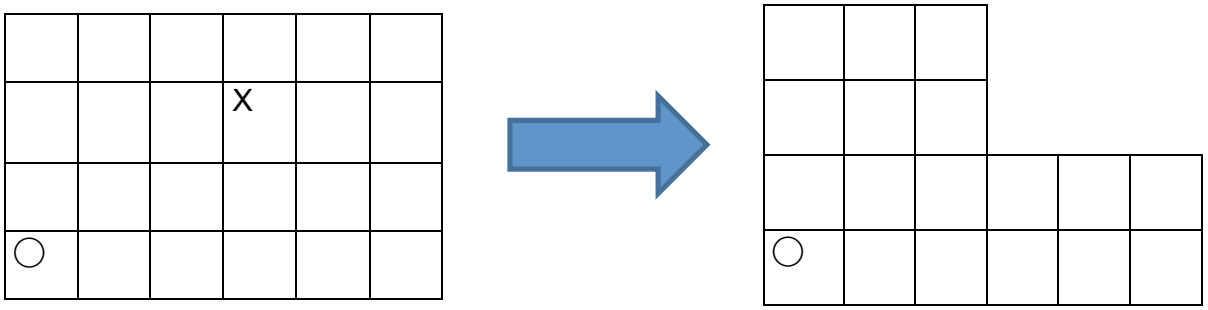
Kompetansemål etter 10.trinn

Eleven skal kunne bruke faktorar, potensar, kvadratrøter og primtal i berekningar

Jafs (på engelsk: «chomp») er et spill for to personer. Spillet starter med en rektangelformet sjokoladeplate inndelt i ruter, og den som til slutt spiser ruten nederst til venstre må betale for sjokoladen:



Spillerne fjerner sjokoladebiter etter tur. Et trekk består av å fjerne en rute, og alle ruter som er til høyre for og over denne, slik at hvis man velger ruten med kryss i blir dette resultatet:



Strengt tatt tar man altså bort alle ruter som ikke er enten til venstre for eller under ruten man valgte. Neste spiller har da færre ruter å velge mellom, og den som til sist må ta ruten nederst til venstre har tapt.
Bruk litt tid til å bli kjent med spillet. Tegn spillebrett (sjokoladeplater) av forskjellige størrelser, og spill to og to.

Vi vil si at en spiller har en vinnerstrategi dersom spilleren kan sørge for å vinne spillet, uavhengig av hva motspilleren velger å gjøre.

1. Først vil vi se på tilfellet der brettet bare består av én rad:

Spill noen ganger på slike $1\times n$-brett med forskjellig lengde. Har en av spillerne en vinnerstrategi på alle slike brett? Hva er den strategien?

2. Nå vil vi se på tilfellet der brettet er kvadratisk, altså for eksempel 2×2-brett, 3×3-brett, 4×4-brett, og så videre.

a) Har spiller A en vinnerstrategi på 2×2-brett? Har spiller B en vinnerstrategi? Beskriv en eventuell vinnerstrategi.

b) Har noen av spillerne en vinnerstrategi på 3×3-brett?

c) Bonusspørsmål: Lag en hypotese om hvorvidt noen av spillerne har en vinnerstrategi på alle kvadratiske brett (unntatt 1×1-brett, som er litt kjedelige, siden de bare består av én rute…). Kan dere vise at hypotesen stemmer?

3. En annen mulighet er smale brett som bare består av to rader, som dette 2×6-brettet:

a) Hvem har en vinnerstrategi på 2×3-brett? Hva er vinnerstrategien?

b) Har noen en vinnerstrategi på 2×4-brett? Hva er i så fall vinnerstrategien?

c) Bonusspørsmål: Lag en hypotese om hvorvidt noen av spillerne har en vinnerstrategi på alle slike smale $2\times n$-brett. Kan dere vise at hypotesen stemmer?

4. Hvis man er flink til å spille Jafs kan man bruke det til å vinne i et annet spill også, som handler om å finne divisorene til et tall: I Divisorspillet er «spillebrettet» et positivt helt tall, for eksempel 12, og de to spillerne velger en divisor i tallet etter tur. Men man kan ikke velge en divisor som er et multiplum av en divisor som er valgt før, så hvis spiller A velger 2, kan ikke spiller B velge 4, 6 eller 12. Den av spillerne som til slutt må velge 1, har tapt. Hvis vi plasserer divisorene til 12 i et rutenett slik som her, kan vi se at det kanskje er en sammenheng mellom dette spillet og Jafs:

3	6	12
1	2	4

a) Spill divisorspillet med 12 som start-tall, og ved å putte divisorene inn i et 2×3-rutenett. Har en av spillerne en vinnerstrategi?

b) Bruk 45 som start-tall. Hvem har en vinnerstrategi nå, og hvordan ser den ut?

c) Hva med 36? Hvordan ser vinnerstrategien ut da?

d) Hva med 100?

e) Hva med 225?

f) Hva med 196?

g) Hva med 24?

h) Kan dere finne et firesifret tall hvor dere vet at spiller A har en vinnerstrategi?

i) I alle disse tilfellene kan vi gjøre om divisorspillet til et tilsvarende Jafs-spill. Hva går galt hvis vi prøver det med 60 som start-tall? Hadde vi kunnet forandre på Jafs-spillet slik at også divisorspillet med 60 som start-tall kunne bli en form for Jafs?

5. Bonusspørsmål: Kan dere vise at en av spillerne har en vinnerstrategi på alle Jafs-brett, uavhengig av brettets størrelse? Hvilken av spillerne er det?