SEMIFINALEOPPGAVENE

2021

OPPGAVE 1: PRINSESSEN ELLER LØVENE

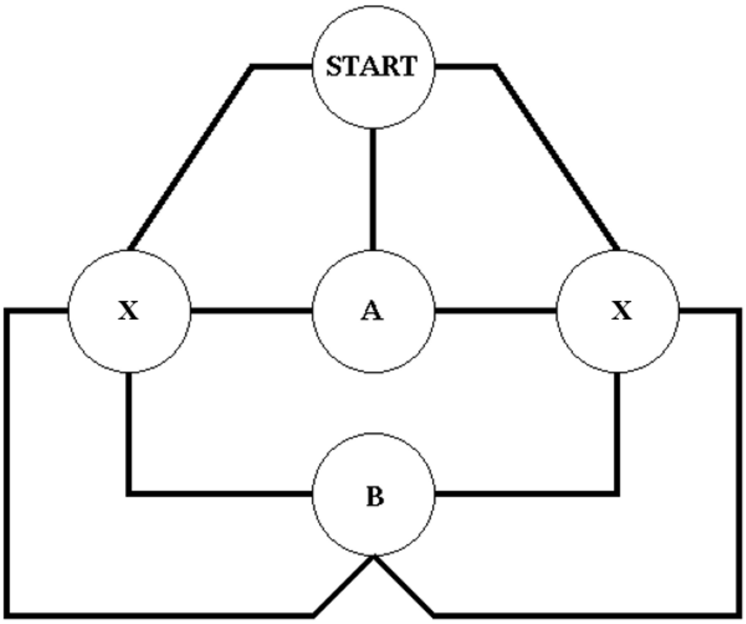
En prinsesse forelsker seg i en klok, men fattig ung mann, som kongen ikke liker.

Kongen befaler derfor at mannen skal kastes til løvene.

Prinsessen ber kongen om nåde og kongen går da med på følgende:

Den unge mannen skal gå inn i en labyrint med fire rom. Han må starte i START og forflytte seg inne i labyrinten for å finne prinsessen. To av rommene er tomme (X). Prinsessen får velge om hun vil vente i rom A eller rom B. I det rommet hun ikke velger, plasseres det sultne løver.

Prinsessen velger det rommet hvor det er størst sannsynlighet for at den unge mannen skal finne henne.



I hvilket rom valgte prinsessen å plassere seg?

Husk å begrunne svaret.

SVARARK OPPGAVE 1

Skole: ______________________________ **Klasse: ________________**

Prinsessen valgte dette rommet: _________

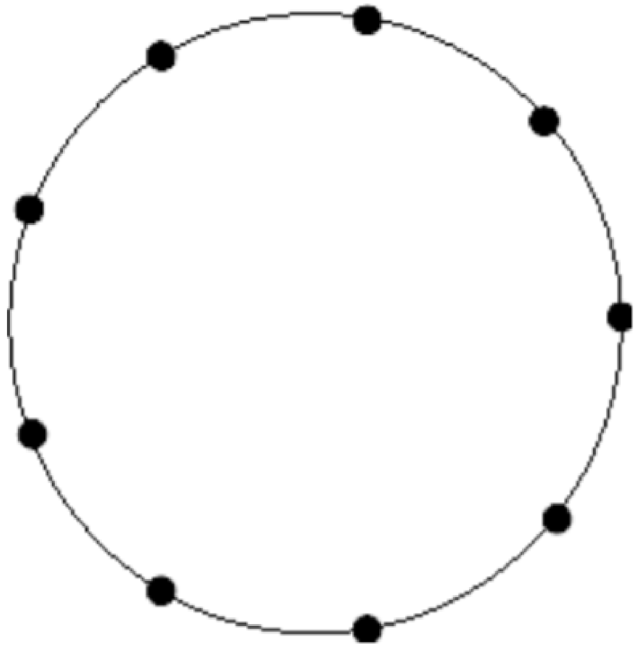
Begrunnelse:

OPPGAVE 2: TREKANTER

Hvor mange ulike trekanter kan vi lage på en sirkel markert med ni punkter. Punktene er likt fordelt rundt sirkelen. Hjørnene på trekantene skal alltid være i et av de ni punktene.

NB: Trekanter som er kongruente teller som <u>en</u> trekant.

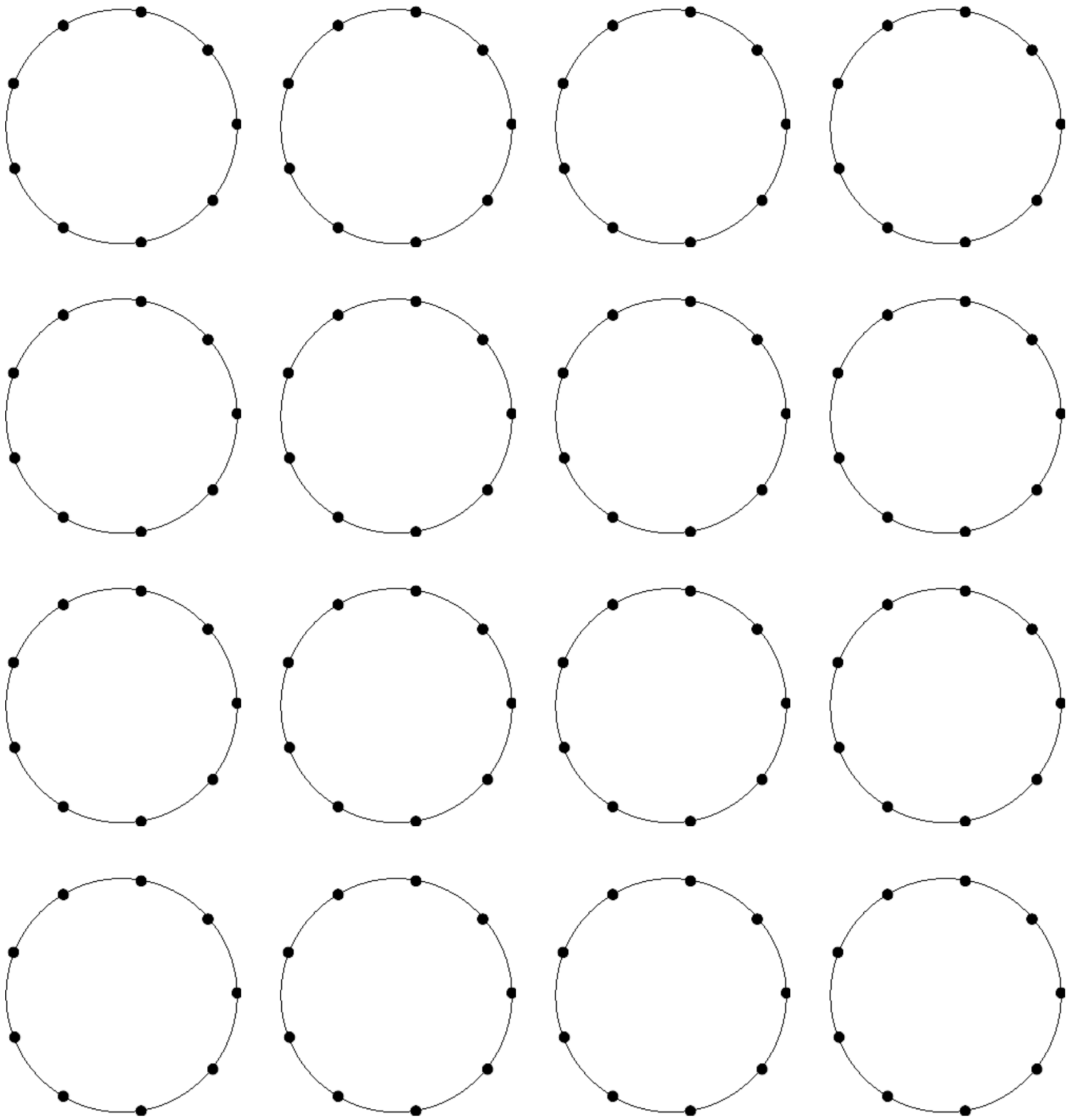
To figurer er kongruente dersom de kan dekke hverandre fullstendig når de legges oppå hverandre, altså at de både er formlike og har lik størrelse.



Tegn alle løsningene dere finner på svararket.

SVARARK OPPGAVE 2

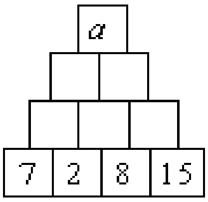
Skole: ________________________________ **Klasse:** _________________



OPPGAVE 3: TALLPYRAMIDER

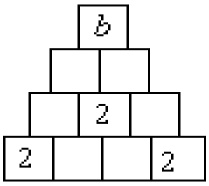
I hver av oppgavene, skal pyramidene fylles ut med hele tall slik at tallet i et felt alltid er summen av de to feltene det har like under seg.

a)



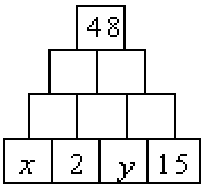
Hvilken verdi må a ha? Fyll inn løsningen på svararket.

b)



Skriv inn tall i de seks ledige rutene i pyramiden på svararket. Finn verdien for b.

c)



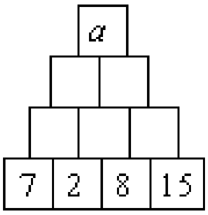
1) Skriv inn løsningene i tabellen på svararket.

2) Hvilken sammenheng må det være mellom x og y? Beskriv denne sammenhengen på svararket.

SVARARK OPPGAVE 3

Skole: ______________________________ **Klasse:** ________________

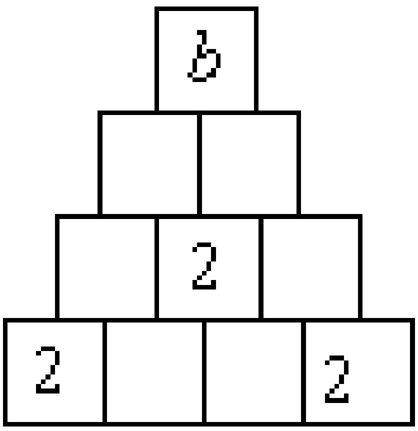
a)



Verdien av a er: ______________________

b)

Skriv inn tall i de seks ledige rutene i pyramiden:

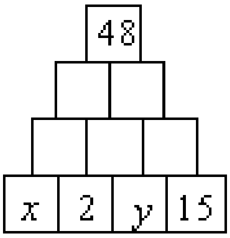


Verdien av b er: ______________________

SVARARK OPPGAVE 3 fortsetter

Skole: ______________________________ **Klasse:** ________________

c)



Fyll ut tabellen:

	x	**y**
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		

Sammenhengen mellom x og y er: ____

OPPGAVE 4: FORTLØPENDE SUMMER

Nedenfor ser vi de 21 tallene 0-20 plassert i sju kolonner, hver med tre tall.

Summerer vi de tre tallene i hver kolonne, finner vi at første kolonne har sum 21 (= 0+7+14), andre kolonne har sum 24 (= 1+8+15) osv…

0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
7	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**
14	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**

Vi ønsker nå å flytte om på tallene, slik at de sju kolonnesummene istedenfor blir «fortløpende tall», altså tall som kommer rett etter hverandre.

Eksempel: Dersom vi velger å plassere tallene 2, 7 og 16 i en kolonne, og 4, 5 og 17 i nabokolonnen vil disse to kolonnesummene være fortløpende tall, nemlig 25 (=2+7+16) og 26 (=4+5+17).

Hvordan kan vi få det til å bli fortløpende kolonnesummer hele veien fra venstre mot høyre?

Finn én løsning, og skriv den inn på svararket.

SVARARK OPPGAVE 4

Skole: ________________________ **Klasse:** ______________

	Kolonne 1	**Kolonne 2**	**Kolonne 3**	**Kolonne 4**	**Kolonne 5**	**Kolonne 6**	**Kolonne 7**
Tall nr.1							
Tall nr.2							
Tall nr. 3							
Sum kolonne							

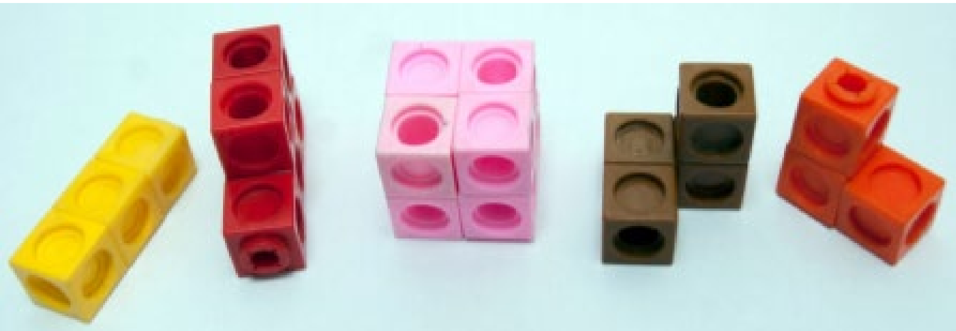
OPPGAVE 5: BRIKKEN SOM MANGLER

Utstyr: 30 Multilink-kuber

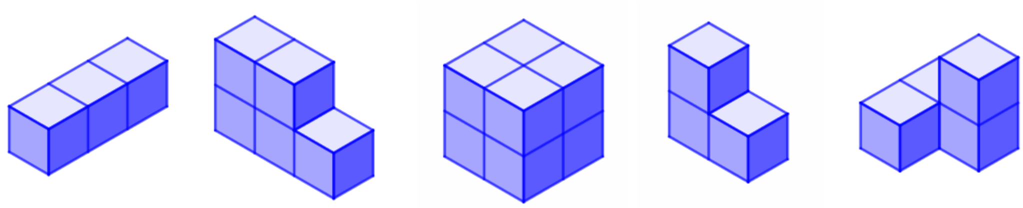
Svarark med isometrisk papir.

Nikolai har et tredimensjonalt puslespill som består av seks «brikker» som kan pusles sammen til en kube. Dessverre har han rotet bort én av de seks brikkene.

Nedenfor ser vi et bilde av de fem brikkene han har igjen:



Og her er tegninger av de fem brikkene:



Hvordan ser den *manglende* brikken ut?

Lag en tegning av denne brikken på det isometriske svararket.

SVARARK OPPGAVE 5

Skole: ______________________________ **Klasse:** ________________

Tegn den manglende «brikken»

OPPGAVE 6: SYNLIGE SIDER

Utstyr: Multilink-kuber

Start med å undersøke én multilink –kube som står på et bord.

Vi kaller den siden som kuben står på for *bunnen*.

Hvor mange sider er synlige på kuben, altså den som ikke er bunnen?

NB: Vi antar at vi kan bevege oss rundt og betrakte den fra alle kanter.

Så undersøker vi <u>to kuber</u>, som er satt sammen. Disse kan stilles opp på bordet enten med én side i bunnen (stående) eller med to sider i bunnen (liggende):

Hvor mange sider er nå synlige?

Fortsett med tre kuber, fire kuber osv …

Kubene skal alltid settes sammen som en stang, og plasseres liggende eller stående.

Fyll ut alle de <u>hvite</u> feltene i skjemaet på svararket.

Antall kuber	Bunn (stående type)	Synlige sider (stående type)	Bunn (liggende type)	Synlige sider (liggende type)
1	1	5		
2	1			
3	1			
4	1			
5	1			
6	1			
	1	97		
	1			299
n				

SVARARK OPPGAVE 6

Skole: ______________________________ **Klasse:** ________________

Fyll ut alle de hvite feltene i skjemaet:

Antall kuber	Bunn (stående type)	Synlige sider (stående type)	Bunn (liggende type)	Synlige sider (liggende type)
1	1	5		
2	1			
3	1			
4	1			
5	1			
6	1			
	1	97		
	1			299
n				

LØSNINGSFORSLAG

Oppgave 1 Prinsessen eller løvene

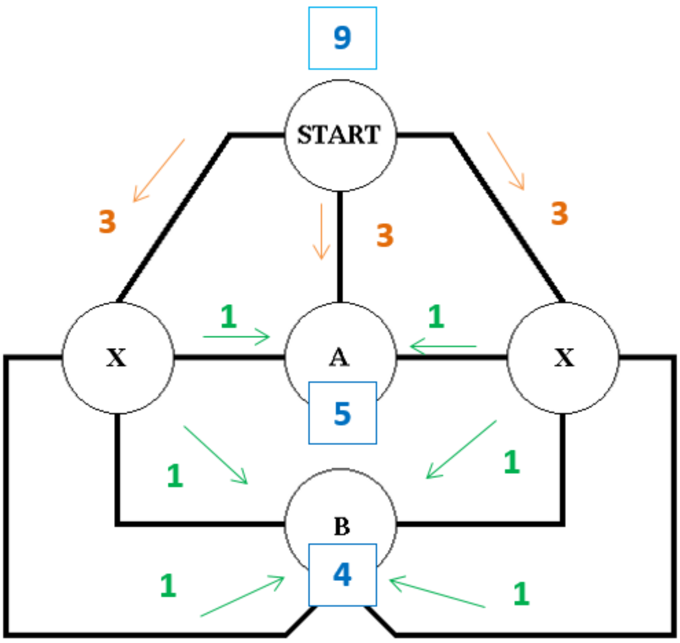
Det er maksimalt to steder hvor den unge mannen skal gjøre et veivalg mellom tre ulike retninger. Når vi antar at veivalgene gjøres helt tilfeldig, vil sannsynligheten for å havne i rom B være henholdsvis $\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$ (startretning «venstre») og tilsvarende $\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$ (startretning «høyre»), og dermed totalt $\frac{2}{9} + \frac{2}{9} = \frac{4}{9}$, altså ca 44 % for å havne i rom B.

Og sannsynligheten for å havne i rom A, er dermed lik $1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$, altså ca 56 %.

Mannen har størst sjanse til å nå fram til prinsessen dersom hun velger å vente i **rom A**.

Det går også an å resonnere mer konkret, ved å tenke seg at vi kan gjøre forsøket 9 ganger, der vi ved første veivalg velger høyre vei 3 ganger, midtre vei 3 ganger og venstre vei 3 ganger. Ved neste veivalg, fordeler valgene seg som 1, 1, 1 på hver side av labyrinten, og til slutt adderer vi hvor mange av de 9 forsøkene som alt i alt fører til henholdsvis rom A eller rom B.

Vi ser da at 5 (= 3 + 1 + 1) forsøk fører inn i rom A, mens 4 (= 1 + 1 + 1 + 1) fører inn i rom B, som igjen betyr at sannsynligheten er $\frac{5}{9}$ for å havne i rom A og $\frac{4}{9}$ for å havne i rom B.

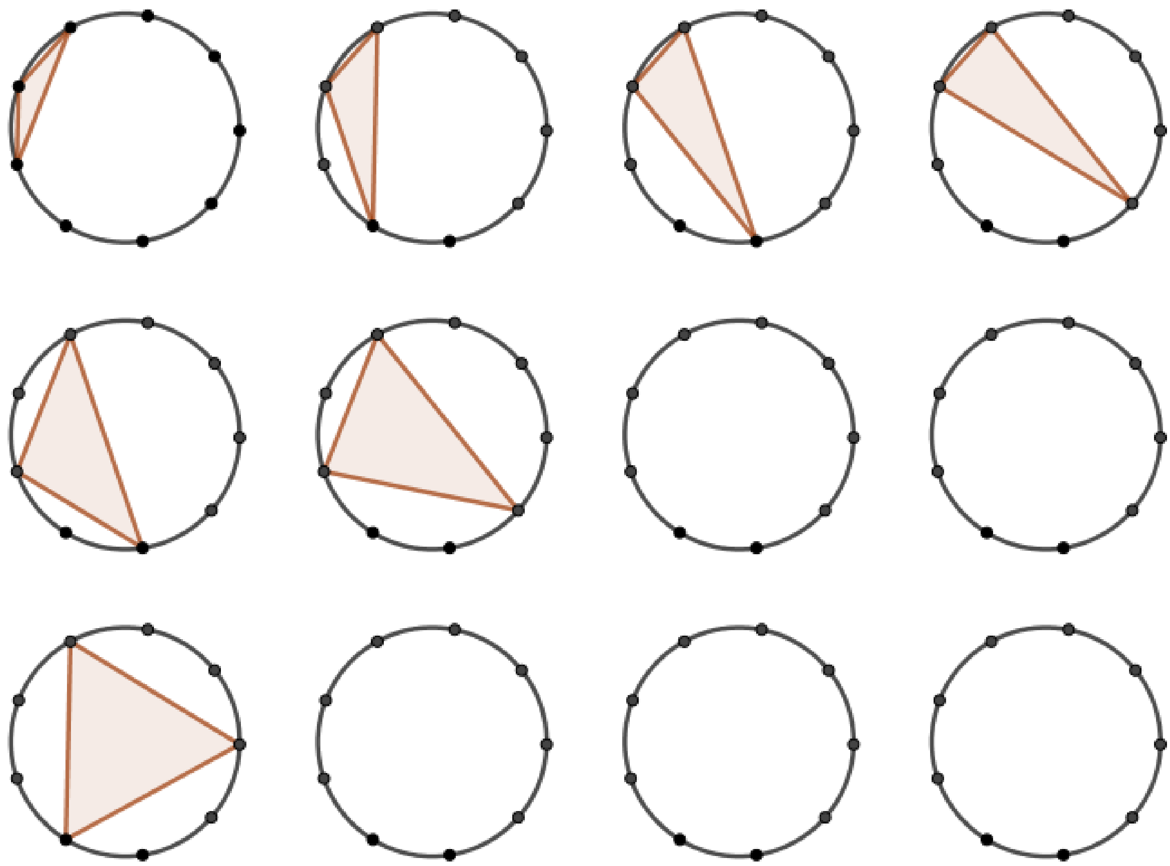


Vi kan ellers legge merke til at det fins 7 ulike «veier» gjennom labyrinten, hvorav 3 fører til rom A og 4 fører til rom B. Da er det kanskje fristende å tenke at sannsynligheten for å havne i rommene A og B er henholdsvis $\frac{3}{7}$ og $\frac{4}{7}$, og at prinsessen derfor velger rom B. Men ifølge oppgaven er prinsessen god i matematikk, og gjør neppe en slik feil. Problemet med det resonnementet, er at de 7 veiene ikke er like sannsynlige (forekommer ikke like hyppig ved helt tilfeldige veivalg), og dermed blir det galt å regne sånn.

Oppgave 2 Trekanter

Det kan være lurt å jobbe litt systematisk, for å være sikker på å få med alle mulighetene. F.eks kan vi starte med trekanter der korteste side går mellom to nabopunkter. Det gir fire forskjellige trekanter. Så går vi videre med trekanter der korteste side går mellom punkter i «avstand to» langs sirkelen. Det gir to forskjellige trekanter. Og til slutt har vi én likesidet trekant der sidekantene går mellom punkter i «avstand tre» langs sirkelen.

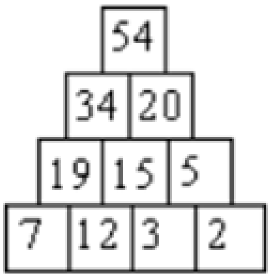
Alt i alt finner vi altså **sju** forskjellige trekanter:

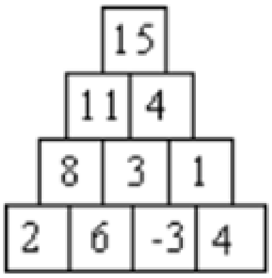


Oppgave 3 Tallpyramider

a)

Fyller ut fra bunnen, og summerer oss opp til topps:

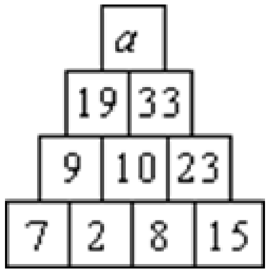




b)

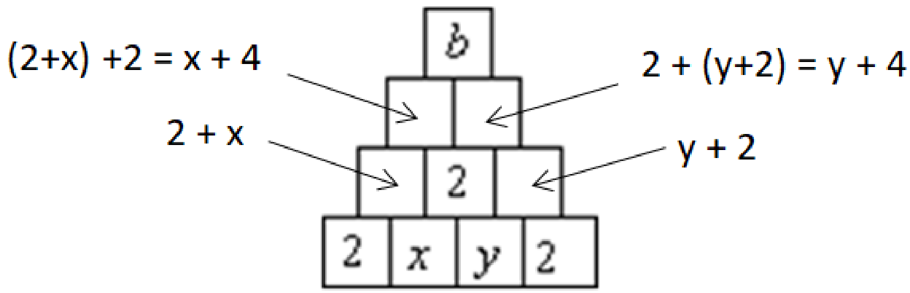
Fyller ut fra bunnen, og summerer oss opp til topps:

Ser da at topptallet må ha verdien a = 52, siden 19+33 = 52.



c)

Vi kan kalle de to ukjente tallene i nederste etasje for henholdsvis x og y, og summerer oss opp til topps:

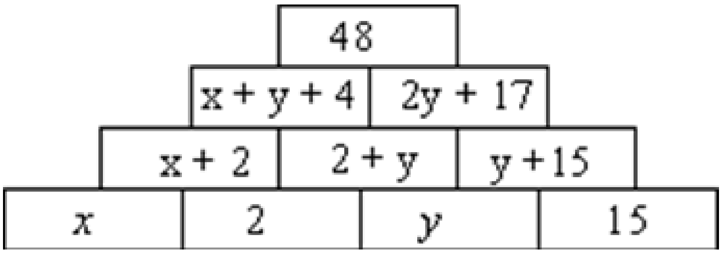


Nå ser vi at b = (x+4) + (y+4) = x + y + 8, og samtidig krever de to nederste etasjene at x+y = 2.

Dermed må b = (x + y) + 8 = 2 + 8 = 10, uansett hvilke verdier x og y måtte finne på å ha.

d)

Fyller ut fra bunnen, og summerer oss opp til topps:



Av de to øverste etasjene følger det nå at (x+y+4) + (2y+17) = 48, som vi kan trekke sammen og forenkle til x + 3y = 27.

Dersom vi tillater negative heltall, får vi uendelig mange muligheter.

De åtte ikke-negative løsningene er:

Nummer	x	y	x + 3y
1	0	9	27
2	3	8	27
3	6	7	27
4	9	6	27
5	12	5	27
6	15	4	27
7	18	3	27
8	21	2	27

Det kan være interessant å legge merke til at verdiene til x-løsningene går i sprang på 3 og 3, mens y-løsningene går i sprang på 1 og 1. (y avtar mens x vokser)

Oppgave 4 Fortløpende summer

Det kan være nyttig å legge merke til at summen av alle tallene er $0+1+2+3+ \ldots + 20 = 210$

(Dette er det vi gjerne kaller trekanttall nummer 20, ofte notert som T_{20}.)

Dette betyr at i gjennomsnitt må de sju søylene hver ha sum $210/7 = 30$.

Og siden søylesummene skal være fortløpende, betyr dette at de sju søylesummene nødvendigvis må være 27, 28, 29, 30, 31, 32 og 33. Dermed vet vi hva det er vi skal forsøke å få til, og etter litt prøving og feiling finner vi én eller flere mulige løsninger, f.eks denne:

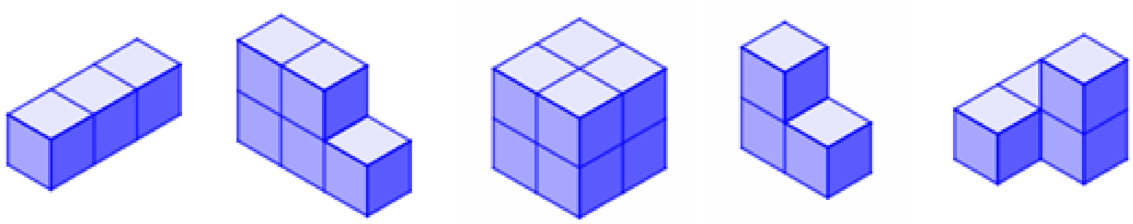
	Søyle 1	**Søyle 2**	**Søyle 3**	**Søyle 4**	**Søyle 5**	**Søyle 6**	**Søyle 7**
Tall nr.1	**0**	**6**	**2**	**5**	**3**	**1**	**4**
Tall nr.2	**7**	**10**	**8**	**9**	**11**	**13**	**14**
Tall nr. 3	**20**	**12**	**19**	**16**	**17**	**18**	**15**
Søylesum	27	28	29	30	31	32	33

eller kanskje denne:

	Søyle 1	**Søyle 2**	**Søyle 3**	**Søyle 4**	**Søyle 5**	**Søyle 6**	**Søyle 7**
Tall nr.1	**7**	**8**	**19**	**9**	**1**	**2**	**0**
Tall nr.2	**3**	**5**	**4**	**10**	**18**	**16**	**13**
Tall nr. 3	**17**	**15**	**6**	**11**	**12**	**14**	**20**
Søylesum	27	28	29	30	31	32	33

Oppgave 5 Brikken som mangler

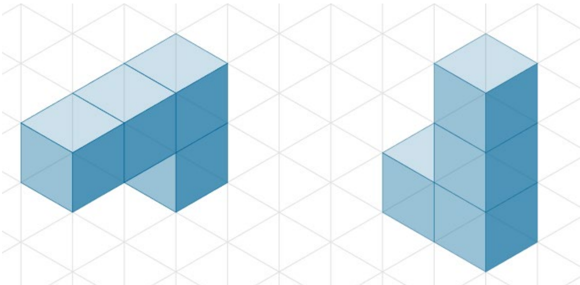
Det kan være nyttig å observere at puslespillet handler om en 3×3×3-kube, dvs en kube som totalt består av 27 små kuber.



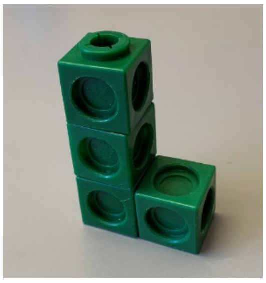
De fem «brikkene» inneholder til sammen 3+5+8+3+4 = 23 små kuber, som dermed bekrefter at den manglende «brikken» skal bestå av 4 (= 27 – 23) små kuber.

Brikken i midten og den ytterst til høyre gir ganske sterke føringer på hvordan puslespillet kan settes sammen for å få en 3×3×3-kube.

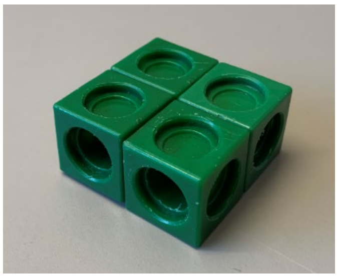
Avhengig av plasseringen av de øvrige brikkene, finner vi at den manglende, sjette brikken f.eks kan se slik ut (her sett fra to ulike vinkler):

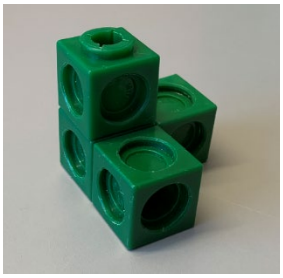


Og her er et bilde av den samme brikken:



Alternative løsninger:



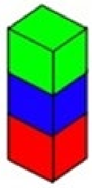


Oppgave 6 Synlige sider

Stående type:

For hver av de n centikubene kan vi i alt se fire sider – unntatt for den øverste centikuben, der vi også ser toppen. Totalt kan vi dermed se n·4 + 1 (= 4n+1) sider på en slik stang.

(En alternativ skrivemåte kan f.eks være (n-1)·4 + 5 .)

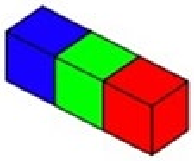


Eksempel (n=3): Vi kan i alt se 3·4 + 1 = 12 + 1 = **13** sider.

Liggende type:

For hver av de n centikubene kan vi i alt se tre sider – unntatt for de to ytterste centikubene, der vi også ser endesidene. Totalt kan vi dermed se n·3 + 2 (= 3n+2) sider på en slik stang.

(En alternativ skrivemåte kan f.eks være (n-2)·3 + 2·4 .)



Eksempel (n=3): Vi kan i alt se 3·3 + 2 = 9 + 2 = **11** sider.

Dette gir oss følgende tabell:

Antall kuber	Bunn (stående type)	Synlige sider (stående type)	Bunn (liggende type)	Synlige sider (liggende type)
1	1	5		
2	1	9	2	8
3	1	13	3	11
4	1	17	4	14
5	1	21	5	17
6	1	25	6	20
24	1	97	24	74
99	1	397	99	299
n		4n + 1		3n + 2